

# SİĞLAŞAN SUDA UZUN DALGA DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

**M.Sami AKÖZ**  
**M.Salih KIRKGÖZ**  
**Mustafa MAMAK**

Ç.Ü. İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana

## ÖZET

Denizlerde ve akarsularda gel-git dalgaları, akarsulardaki taşkın dalgaları ve sığlaşan suda kırılmaya maruz dalgaların hareketlerinde görüldüğü gibi su derinliğinin dalga uzunluğuna oranının küçüldüğü derinlik şartlarında, su partiküllerinin düşey ivmesinin önemsiz ve taban etkisinin önem kazandığı dalga hareketlerinin analizinde uzun dalga denklemleri kullanılabilir.

Bu çalışmada, dalga transformasyon bölgesinde sığlaşan dalgaların analizi için uzun dalga denklemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal çözümü yapılmış ve elde edilen teorik bulgular deneyler ile karşılaştırılmıştır. 1/6 ve 1/12 eğimli tabanlardaki dalgalar üzerinde yapılan teorik uygulamalarda dalga genliği ve kret partikül hızının transformasyon bölgesindeki değişimlerinin deney bulguları ile uyumlu olduğu görülmüştür.

## 1. GİRİŞ

Sığlaşan dalga hareketinin analizi; kıyı akımlarının ve sediment taşınımının tahmininde, kıyı yapılarının tasarımında kıyı mühendisliği açısından önem arz etmektedir. Bu amaçla birçok araştırmacı bu konuyla ilgili olarak değişik yaklaşımlar sunarak teorik ve deneysel çalışmalar yapmışlardır.

Airy (1845), Boussinesq (1872), Rayleigh (1876) ve Stokes (1891) küçük ve sonlu genlikli uzun dalgalar üzerinde araştırma yapmışlardır. Stoker (1957) karakteristikler yöntemi yardımıyla sığlaşan suda uzun dalga denkleminin çözümünü yaparak dalganın özelliklerini incelemiştir. Kırgöz (1978), lineer olmayan uzun dalga denklemlerini

sıglaşan suda kırılan dalğanın geometrik ve kinematik özelliklerini belirlemek için kullanmış ve sayısal çözümlerini karakteristikler yöntemi ile yapmıştır. Hibbert ve Peregrine (1979) Lax-Wendroff şeması kullanarak uzun dalga denkleminin çözümünü sunmuşlar ve eğimli bir taban üzerindeki üniform bir bore'un gelişimini hesaplamışlardır.

Goto (1979), Boussinesq denklemi için bir Lagrangian formülasyonu geliştirmiş, Goto ve Shuto (1983) bu denkleme viskozite terimi ilave ederek çözmüşlerdir. Schäffer ve ark. (1993), sıglaşan suda kırılan dalga için Boussinesq denklemini çözen tek boyutlu bir model geliştirmişler ve bu model ile köpüklenme bölgesindeki dalga parametrelerini tanımlamışlardır. Karambas ve Koutitas (1992) tarafından da Boussinesq denklemine dayanan, sıglaşma ve kırılma bölgesinde geçerli olan bir dalga yayılma modeli geliştirilmiştir.

Grilli ve ark. (1994), 1:35 eğimli taban üzerindeki tek dalğanın sıglaşmasını nonlineer potansiyel akım modeli kurarak hesaplamışlardır. Ayrıca Grilli ve ark. (1997), 1:100 ve 1:8 arasında değişen eğime sahip tabanlarda aynı modeli kullanarak sınır eleman yöntemi yardımı ile tek dalğanın sıglaşması ile birlikte kırılmasının da analizini yapmışlardır.

Titov ve Synolakis (1995), tek boyutlu uzun dalğanın yayılması ve tırmanması için bir model geliştirmişlerdir. Viskozite ve sürtünme terimlerinin yer almadığı sıg-su dalga denklemlerini değişken gridli sonlu farklar yöntemi ile çözmüşlerdir.

Bu çalışmada, sıglaşan suda (transformasyon bölgesinde) dalga hareketinin analizi için uzun dalga denklemleri kullanılmıştır. Diferansiyel süreklilik denklemi ile lineerleştirilmiş momentum denklemlerinden dalga profili ve yatay partikül hızı için uzun dalga denklemleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemine dayalı geliştirilen bir bilgisayar programı yardımı ile sayısal çözümü yapılan uzun dalga denklemleri, sıglaşan suda yayılmakta olan bir dalğanın genliğindeki ve yatay partikül hızlarındaki değişimlerin hesaplanması için kullanılmıştır.

## 2. UZUN DALGA DENKLEMİ

İki boyutlu sıkışmayan akımda süreklilik denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Burada u ve v sırasıyla yatay ve düşey partikül hız bileşenleri, x yatay mesafe ve y durgun su yüzeyinden yukarı doğru pozitif düşey mesafedir. (1) denklemi y ye göre integre edilip yüzeydeki ve tabandaki kinematik sınır şartları uygulanırsa

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u \, dy = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2)$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial x} [u(h + \eta)] = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

elde edilir. Birim genişlikten geçen debi  $q = \int_{-h}^{\eta} u dy$  olmak üzere (2) ifadesi yeniden yazılırsa:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4)$$

Uzun dalga hareketinde akışkanın düşey ivmesi ihmal edilebilir ve bu durumda serbest yüzeyin altındaki herhangi bir noktada basınç hidrostatiktir:

$$p = \rho g(\eta - y) \quad (5)$$

ve

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6)$$

(6) denklemi  $y$  ye bağlı değildir, dolayısıyla su partikülünün yatay hızı da  $y$  den bağımsızdır ( $u=u(x,t)$ ).

Buna göre iki boyutlu değişken akım için lineerleştirilmiş momentum denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7)$$

şeklinde yazılabilir. (7) ifadesini  $y$  ye göre integre edip,  $\eta \ll h$  olduğu için  $\eta$  ihmal edilerek düzenlenirse:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} u dy = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (8)$$

veya

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -gh \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (9)$$

elde edilir. (4) ifadesinin  $t$  ye göre, (9) ifadesinin  $x$  e göre türevleri alındığında bu iki denklemden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

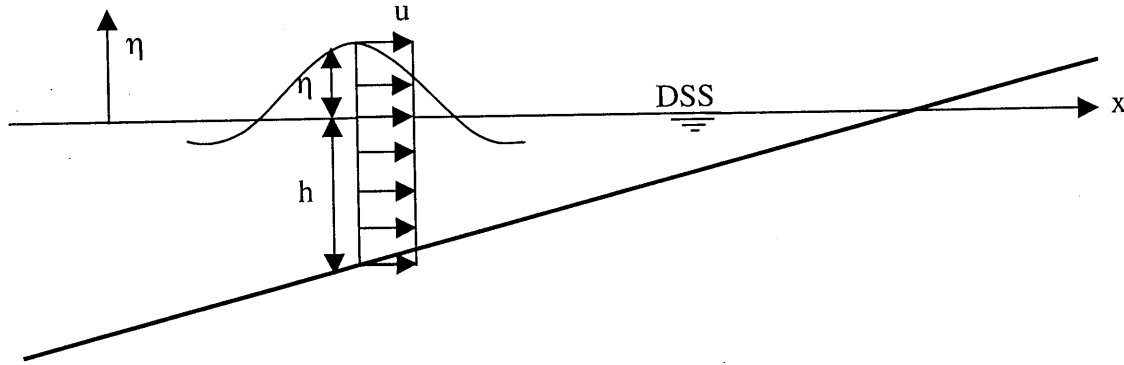
dalga profili için uzun dalga denklemi elde edilir (Connor ve Brebbia, 1976). Burada  $h(x)$  durgun-su derinliğini ve  $\eta(x,t)$  su yüzünün, durgun su seviyesinden olan yüksekliğini temsil etmektedir (Şekil 1).

Benzer şekilde (7) denklemi  $t$  ye göre ve (3) denklemi de  $\eta \ll h$  olduğu için  $\eta$  ihmal edilerek düzenlenip  $x$  e göre türevleri alınır, bu iki denklemden :

$$\frac{\partial^2(uh)}{\partial x^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

yatay partikül hızı için uzun dalga denklemi elde edilir. Burada  $u(x,t)$  yatay partikül hızını göstermektedir (Şekil 1).

(10) ve (11) denklemleri lineer olmayan terimler içermektedir. Bu denklemler verilen sınır şartları altında sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal olarak çözülebilir. Aşağıda sonlu elemanlar formülasyonuna göre yapılan çözüm yöntemi açıklanmıştır.



Şekil 1 Sığlaşan Suda Dalga

### 3. SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU

Dalga hareketinin harmonik hareket olduğu kabulü ile yüzey profili:

$$\eta(x,t) = a(x)e^{-i\omega t} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilebilir (Connor and Brebbia, 1976). (12) denkleminde  $a(x)$  dalganın genliğini,  $\omega = 2\pi/T$  açısal frekansını ve  $t$  zamanı göstermektedir. (12) ifadesi (10) denkleminde yerine konursa uzun dalga denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\omega^2}{g} a = 0 \quad (13)$$

Galerkin yöntemi kullanılarak (13) denkleminde integrasyon uygulandığında:

$$\int \left( h \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \delta a}{\partial x} - \frac{\omega^2}{g} a \delta a \right) dx = \int \delta a \left( h \frac{\partial a}{\partial x} \right) ds \quad (14)$$

elde edilir.  $a(x)$  için yaklaşım yapılırsa:

$$a(x) = \langle N(x) \rangle \{ a_d \} \quad (15)$$

Burada  $N(x)$  şekil fonksiyonlarını,  $a_d$  düğüm değerlerini göstermektedir. Bu yaklaşım (14) ifadesinde yerine yazılırsa integrasyon:

$$\langle \delta a_d \rangle \int \left[ h [N_{,x}] \langle N_{,x} \rangle - \frac{\omega^2}{g} [N] \langle N \rangle \right] dx a_d = \langle \delta a_d \rangle \int [N] f ds \quad (16)$$

şeklinde elde edilir. (16) ifadesi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$[K] \{ a_d \} - \omega^2 [M] \{ a_d \} = \{ P \} \quad (17)$$

burada

$$[K] = \int h [N_{,x}] \langle N_{,x} \rangle dx$$

$$[M] = \frac{1}{g} \int [N] \langle N \rangle dx$$

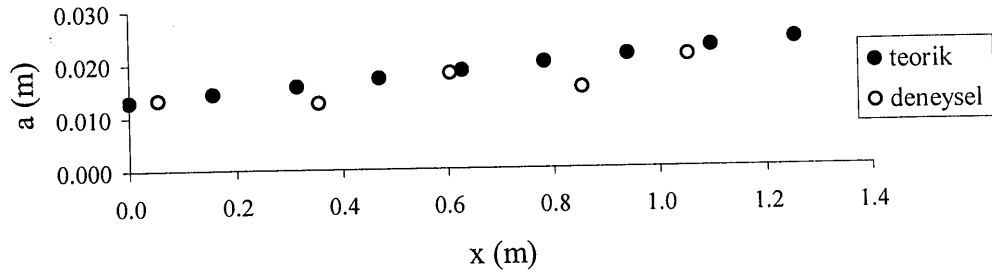
$$[P] = \int [N] f ds$$

(17) denklemini verilen sınır şartları altında çözülürse eleman düğüm noktalarında aranan  $a$  değerleri ve istenirse de (12) denkleminde göre de dalga profili elde edilir. Açıklanan sonlu elemanlar formülasyonunun (11) denkleminde uygulanması ile benzer şekilde yatay partikül hızı  $u$  nun değişiminin hesaplanması mümkündür.

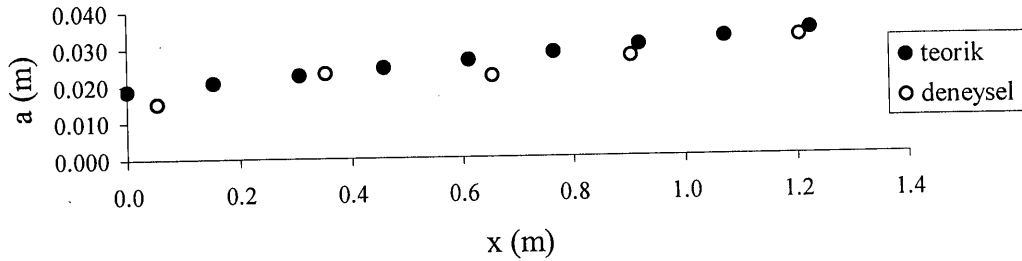
#### 4. BULGULAR

Sığlaşan suda uzun dalga denklemlerinin sayısal çözümü için sonlu elemanlar yöntemine dayalı bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu program yardımı ile elde edilen sonuçları karşılaştırmak için Kırkgöz (1978) tarafından yapılan deneysel çalışmalardan elde edilen bulgular kullanılmıştır.

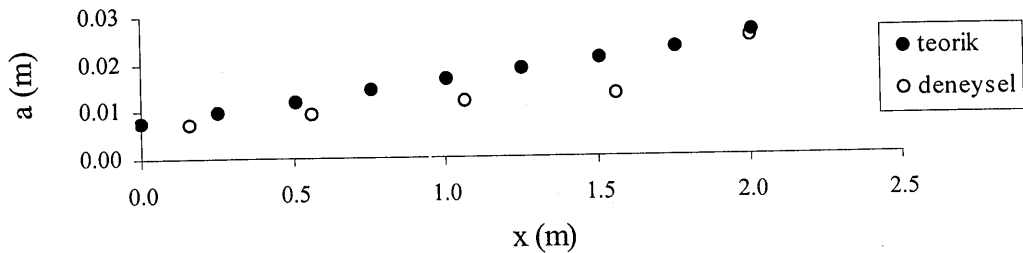
(10) denklemleri kullanılarak değişik dalga şartları için dalga genliğinin değişimi teorik olarak bulunmuştur. Yatay partikül hızı için elde edilen (11) ifadesinin de genlik hesabında kullanılan dalga şartları için sayısal çözümü yapılmıştır. Şekil 2-9 da değişik dalga şartları için verilen sınır şartlarında sonlu elemanlar yöntemine göre teorik olarak hesaplanan dalga genlikleri ve yatay partikül hızları ile aynı değerlerin deneysel olarak değişimleri verilmiştir.



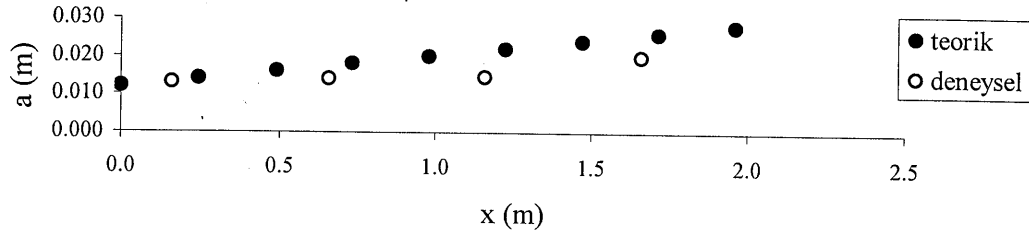
Şekil 2 Sığlaşan Suda Dalga Genliğinin Değişimi,  $T=1,18$  s,  $H_0=0,0281$  m,  $L_0=2,174$  m, Taban Eğimi  $S=1/6$



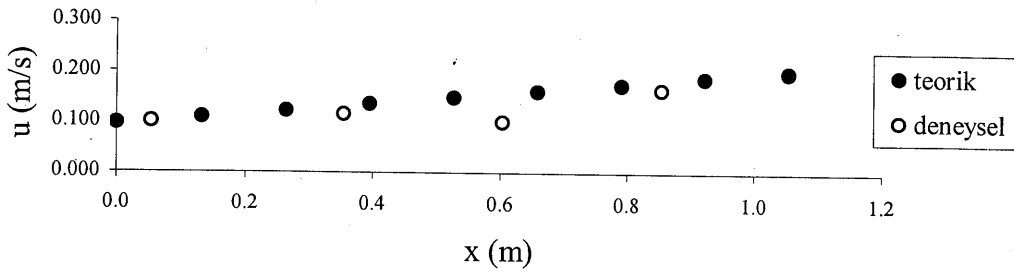
Şekil 3 Sığlaşan Suda Dalga Genliğinin Değişimi,  $T=0,93$  s,  $H_0=0,0406$  m,  $L_0=1,3504$  m, Taban Eğimi  $S=1/6$



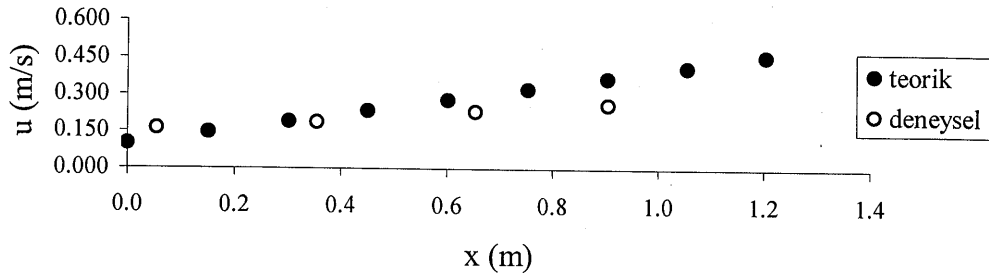
Şekil 4 Sığlaşan Suda Dalga Genliğinin Değişimi,  $T=1,7$  s,  $H_0=0,0154$  m,  $L_0=4,512$  m, Taban Eğimi  $S=1/12$



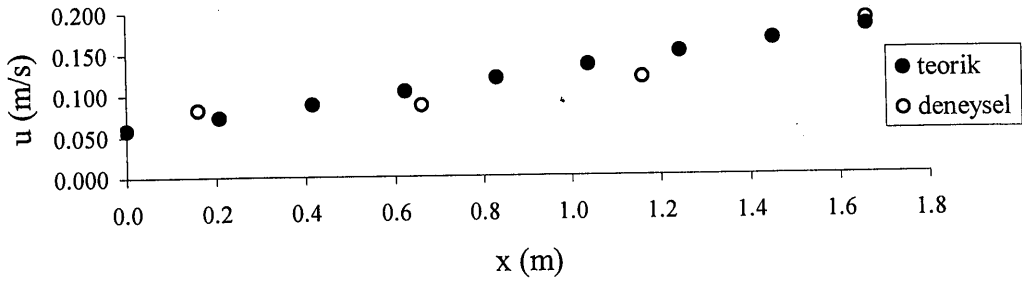
Şekil 5 Sığlaşan Suda Dalga Genliğinin Değişimi,  $T=1,27$  s,  $H_0=0,0241$  m,  $L_0=2,518$  m, Taban Eğimi  $S=1/12$



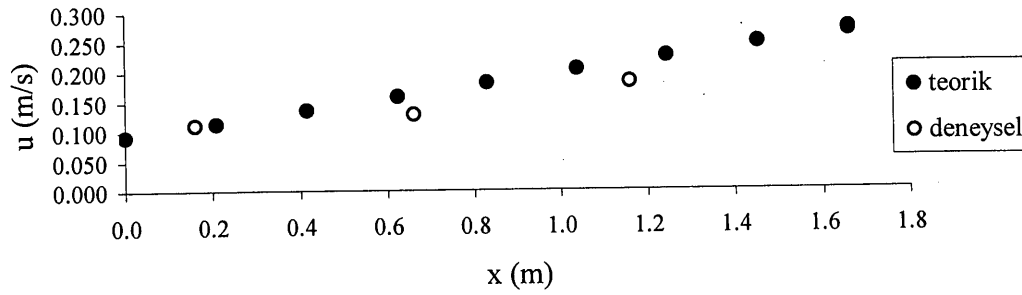
Şekil 6 Sığlaşan Suda Kretteki Yatay Partikül Hızlarının Değişimi,  $T=1,18$  s,  $H_0=0,0281$  m,  $L_0=2,174$  m, Taban Eğimi  $S=1/6$



Şekil 7 Sığlaşan Suda Kretteki Yatay Partikül Hızlarının Değişimi,  $T=0,93$  s,  $H_0=0,0406$  m,  $L_0=1,3504$  m, Taban Eğimi  $S=1/6$



Şekil 8 Sığlaşan Suda Kretteki Yatay Partikül Hızlarının Değişimi,  $T=1,70$  s,  $H_0=0,0154$  m,  $L_0=4,5122$  m, Taban Eğimi  $S=1/12$



Şekil 9 Sığlaşan Suda Kretteki Yatay Partikül Hızlarının Değişimi,  $T=1,27$  s,  $H_0=0,0241$  m,  $L_0=2,5182$  m, Taban Eğimi  $S=1/12$

Şekil 2 ve Şekil 3 te farklı derin-su dalga dikliğine sahip sığlaşan dalgaların 1/6 eğimli taban üzerindeki dalga genliklerinin değişimleri verilmiştir. Bu iki şekilden, derin-su dalga dikliği büyük olan sığlaşan dalganın teorik hesaplamalar sonucu elde edilen genlik değişimlerinin deneysel bulgulara daha yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 4 ve Şekil 5 de 1/12 taban eğimindeki farklı derin-su dalga dikliğine sahip sığlaşan dalga genliklerinin değişimi görülmektedir. Benzer şekilde, derin-su dalga dikliği büyük olan dalganın teorik hesaplamalar sonucu elde edilen genlikleri deneysel bulgularla daha uyumlu olduğu anlaşılmaktadır.

Diğer taraftan 1/6 eğimli taban üzerinde teorik olarak hesaplanan dalga genliklerinin 1/12 taban eğimindeki dalgalara göre deneysel bulgulara daha yakın olduğu görülmektedir.

Yatay partikül hızı için tanımlanan uzun dalga denkleminin sayısal çözümlerinden elde edilen dalga kretindeki teorik yatay partikül hızlarının değişimi deneysel bulgularla birlikte Şekil 6 ve Şekil 7 de 1/6 , Şekil 8 ve Şekil 9 da 1/12 taban eğimi için verilmiştir.



Bu şekillerden görüldüğü gibi sığlaşan dalganın kretindeki yatay partikül hızı için sayısal çözümlerden elde edilen bulgular ile deney bulguları büyük ölçüde uyum sağlamaktadırlar.

## 5. SONUÇ

Diferansiyel süreklilik denklemi ile lineerleştirilmiş momentum denklemlerinden dalga genliği ve yatay partikül hızı için uzun dalga denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin sayısal çözümleri için sonlu elemanlar yöntemi kullanılmış ve bu sayısal yöntemeye dayalı geliştirilen bilgisayar programı yardımı ile dalga genliği ve kret partikül hızının teorik hesabı yapılmıştır.

Değişik derin-su dalga dikliğine sahip dalga şartları altında, 1/6 ve 1/12 eğimlerine sahip tabanlar üzerinde sayısal hesaplardan elde edilen bulgular deney bulguları ile karşılaştırılmıştır.

Dalga genliğinin 1/6 ve 1/12 taban eğimleri için yapılan sayısal çözümlerinde, derin-su dalga dikliği büyük olan sığlaşan dalgaların teorik olarak hesaplanan genliklerinin, deneysel bulgulara daha yakın olduğu, ayrıca 1/6 taban eğimi için elde edilen sayısal çözümlerin 1/12 ye göre deneylerle daha uyumlu olduğu görülmüştür.

1/6 ve 1/12 eğimli tabanlarda transformasyon bölgesindeki dalgaların kretindeki yatay partikül hızları için sayısal hesaplardan elde edilen bulguların genelde deney bulgularına büyük ölçüde yaklaştığı saptanmıştır.

## KAYNAKLAR

- AIRY, G.B., (1845), On Tides and Waves, *Encyclopedia Metropolitana*, London.
- BOUSSINESQ, J., (1872), Théories des Ondes et des Remous qui se Propageant le Long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Contenu dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Pareilles de la Surface au Fond, *Journal de Mathématiques, Paris*, Vol.17, 55-108.
- CONNOR, J.J., BREBBIA, C.A., (1976), Finite Element Techniques for Fluid Flow, *Newnes-Butterworths*, 185-189.
- GOTO, C., (1979), Nonlinear Equation of Long Waves in the Lagrangian Description, *Coast. Engrg. In Japan, Tokyo*, 22, 1-9.
- GOTO, C., SHUTO, N., (1983), Numerical Simulation of Tsunami Propagation and Runup, *Tsunamis-Their Science and Engineering, Terrarup, Tokyo*, 439-451.
- GRILLI, S.T., SUBRAMANYA, R., KIRBY, J.T., WEI, G., (1994), Comparison of Modified Boussinesq and Fully Nonlinear Potential Models for Shoaling Solitary waves, *Proc., Int. Symp. Waves-Phys. and Num.Mod.*, 524-533.
- GRILLI, S.T., SVENDSEN, I.A., SUBRAMANYA, R., (1997), Breaking Criterion and Characteristics for Solitary Waves on Slopes, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 123, (3), 102-112.
- HIBBERT, S., PEREGRINE, D.H., (1979), Surf and Runup on a Beach: Uniform Bore, *J. Fluid Mech.*, 95, 323-345.
- KARAMBAS, T.V., KOUTITAS, C., (1992), A BreAking Wave Propagation Model Based on The Boussinesq Equations, *Coastal Engineering, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam*, 18, 1-19.

- KIRKGÖZ, M.S., (1978), Breaking Waves: Their Action on Slopes and Impact on Vertical Seawalls. *Ph. D. Thesis, University of Liverpool, U.K.*
- RAYLEIGH, L., (1876), On Waves, *Philosophical Magazine*, Ser.5, 1, 257-279.
- SCHÄFFER, A.H., MEDSEN, A.P., DEIGAARD, R., (1993), A Boussinesq Model for Waves Breaking in Shallow Water, *Coastal Engineering, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam*, 20, 185-202.
- STOKER, J.J., (1957), Water Waves, *Interscience Publishers, New York.*
- STOKES, G.G., (1891), On the Theory of Oscillatory Waves, *Philosophical Magazine*, 1, 314-316.
- TITOV, V.V., SYNOLAKIS, C.E., (1994), Modeling of Breaking and Nonbreaking Long-Wave Evolution and Runup Using VTCS-2, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 121, (6), 308-316.
- ZELT, J.A., (1991), The Runup of Nonbreaking and Breaking Solitary Waves, *Coast. Engrg.*, 15, 205-246.

## ABSTRACT

There are a number of waves in which the water-depth to wavelength ratio is small and the vertical accelerations of the fluid particles are unimportant, and, at the same time the influence of the bed may be considerable. Among such cases are the tides in the oceans and rivers, flood waves in rivers and breaking waves on beaches. Such motions are often considered to be best represented theoretically by the long wave equations.

In this study, the analysis of the shoaling waves in the transformation zone of breaking waves is carried out by using the long wave equations which are solved by the finite element method. The computational results are compared with the experiments. The finite element method is applied to the waves propagating on beaches having 1/6 and 1/12 slopes. The theoretical results obtained for the variation of wave crest elevation and the crest particle velocity are found quite in agreement with the experimental results.