

# Relaxation metodu ile hiperstatik sistemlerin çözümü

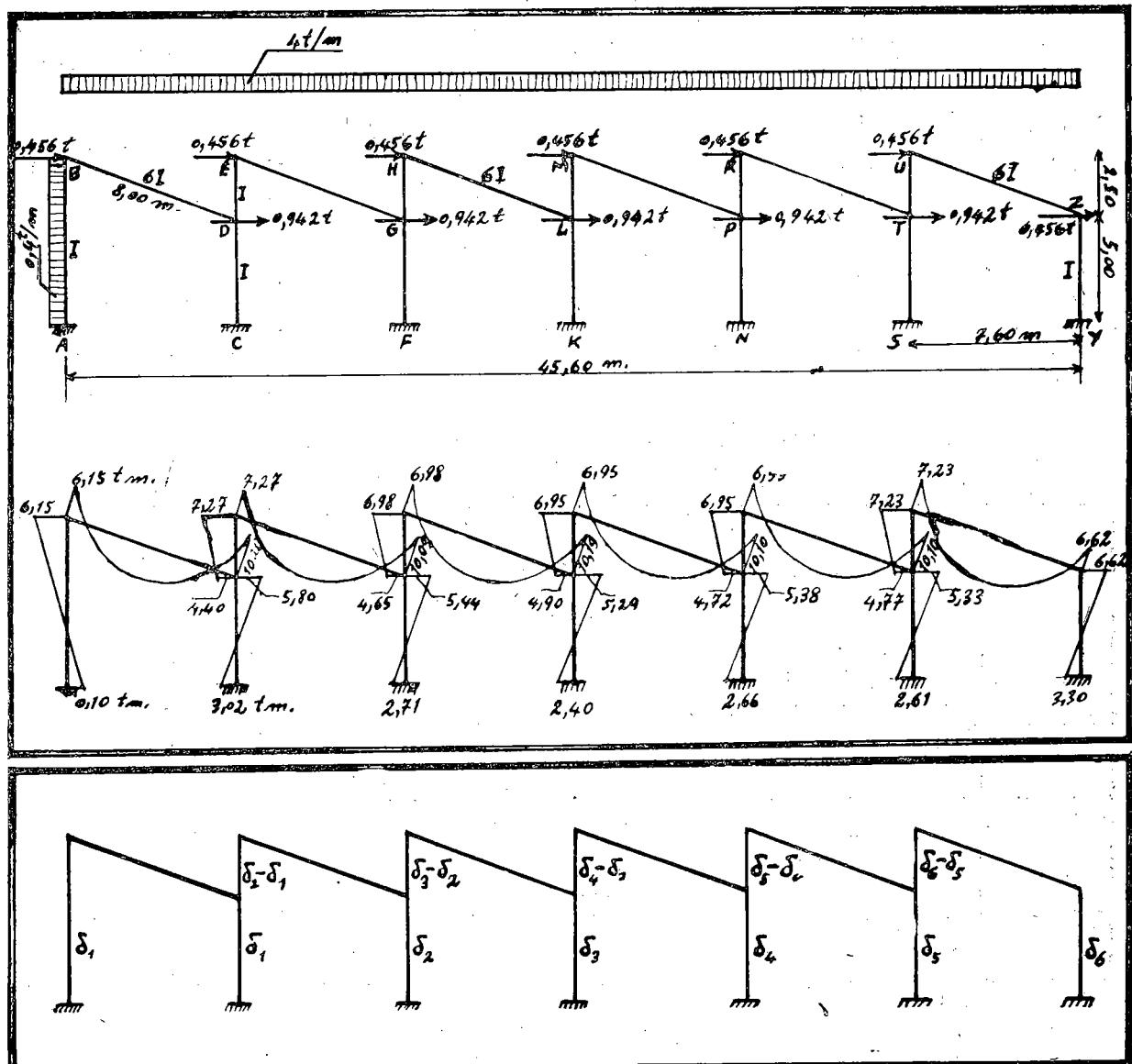
Yazan :  
**Ali VURAL**  
 Y. Müh.

C ross, Moriss... Kani vesair bütün iterasyon metodlarını özel hal olarak içine alan genel bir iterasyon metodu mevcut olup Relaxation adı ile anılmaktadır. Bu metodda sistemin özelliğini göz önüne almağa lüzum yoktur. Diğer iterasyon metodlarına üstünlüğü de bu sebeptendir.

Relaxation metodunda çubuk ugalarının (veya düğüm noktalarının)  $\theta$  rotasyonları ile çubukların birer ucunun diğer ucularına nazaran  $\delta$  translasyonları bilinmeyen olarak alınmaktadır. Her düğüm noktasının  $\theta$  rotasyonlarını bilinmeyen olarak almak zaruridir. Fa-

kat her çubuktaki translasyonu bilinmeyen olarak alıma lüzum yoktur. Sistemin süreklilığı dolayısıyle çubukların bazılarının transtasyon miktarlarını diğerlerinin translasyon miktarlarına linear tarzda bağlı olarak ifade etmek daima mümkündür. Kat sayılar, çubukların ufukla teşkil ettiği açıların trigonometrik fonksiyonlardır.

Düğüm noktalarının (veya o düğüm noktasında kırleşen çubuk uçlarının)  $\theta$  rotasyonları sağdan sola doğru ise pozitif itibar edilmektedir. Böyle olduğu zaman çubuk ugalarının düğüm noktasına tatbik ettiği momentler düğüm noktasını soldan sağa (saat ibresi yönünde) çevirmek ister. Düğüm noktasını saat ibresi yönünde çevirmeye çalışan momentler pozitif itibar edilmektedir. Bu Cross metodunda da böyledir.



TABLO — 1

	$\theta_B$	$\theta_0$	$\theta_E$	$\theta_G$	$\theta_H$	$\theta_L$	$\theta_M$	$\theta_P$	$\theta_R$	$\theta_T$	$\theta_U$	$\theta_V$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$	$\delta_6$	siğ.İ.
$\sum M_B=0$	3,5333	1,508											0,1065,						17,38
$\sum M_E=0$	1,508	5,4	0	0,8	$\theta_E$								-0,725,	0,965,					-19,25
$\sum M_H=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_E$							-0,765,	0,965,					19,25
$\sum M_L=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_H$							-0,725,	0,965,					-19,25
$\sum M_M=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_L$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_P=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_M$							-0,965,	0,965,					-19,25
$\sum M_R=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_P$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_T=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_T$							-0,725,	0,965,					-19,25
$\sum M_U=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_U$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_V=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_V$							-0,725,	0,965,					-19,25
$\sum M_B=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_B$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_H=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_H$							-0,965,	0,965,					-19,25
$\sum M_L=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_L$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_P=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_P$							-0,965,	0,965,					-19,25
$\sum M_T=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_T$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum M_U=0$	1,5	0	5,4	0	0,8	$\theta_U$							-0,965,	0,965,					-19,25
$\sum M_V=0$	0,8	0	4,6	0	1,5	$\theta_V$							-0,965,	0,965,					19,25
$\sum T_{BZ}=0$	0,106	0	-0,725	-0,965									1,3565,	-0,7685,					-2,90
$\sum T_{EZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685				-1,40
$\sum T_{HZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685,				-1,40
$\sum T_{PZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685,				-1,40
$\sum T_{TZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685,				-1,40
$\sum T_{UZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685,				-1,40
$\sum T_{VZ}=0$	0,96	0	0,96	0	-0,725	-0,965							-0,7685,	2,4965,	-0,7685,				-1,40

$\delta$  translasyonları için işaret meselesine gelince : Çubukta bir ucun diğerine nazaran translasyonu soldan sağa doğru ise pozitif kabul edilmektedir. Böyle olduğu zaman çubuğun her iki ucunun kendilerinin bitiştiği düğüm noktasına tatbik ettikleri momentler o düğüm noktasını saat ibresi yönünde çevirmek isterler. Yani pozitif momentler doğar.

Prizmatik ve doğru eksenli çubuklar göz önüne alımlısa herhangi bir '(i)' düğüm noktasında birleşen (p) adet çubuk için moment denge denklemi şu şekildeildir.

$$\sum_{i=1}^P \frac{4EI_P}{l_p} \theta_i + \sum_{i=1}^P \frac{2EI_P}{l_p} \theta_p + \sum_{i=1}^P \frac{6EI_P}{l_p^2} \delta_p + \sum_{i=1}^P M_p^o = 0$$

Burada  $M_p^o$  momenti ile yükten dolayı çubuk ucunun (i) düğüm noktasına tatbik ettiği tedahül momenti anlaşılmır.

Aynı '(i)' düğüm noktasında yatay izdüşüm denklemi de şu şekildeildir.

$$\sum_{i=1}^P [N_p^o \cos \alpha_p + T_p^o \sin \alpha_p] + \sum_{i=1}^P \frac{6EI_P}{l_p^2} [\theta_p + \theta_i] \sin \alpha_p + \sum_{i=1}^P \frac{12EI_P}{l_p^3} \delta_p \sin \alpha_p = 0$$

Burada  $N_p^o$  ve  $T_p^o$  tedahülli sistemde çubuğun (i) düğüm noktasına tatbik ettiği normal kuvvet ve kesme kuvvetidir.  $\alpha$  açısı da aynı çubuğun yatayla teşkil ettiği açıdır. Yönü trigonometride kabul edilen yönür. Düşey izdüşüm denklemi de yukarıdaki gibidir. Açı, çubuğun düşüyle teşkil ettiği açıdır, ve yönü trigonometrideki yönür.

Tatbikatta tesadüf edilen sistemlerde ekseriya kendi bünyesinde translasyona məruz kalmayıp sulp cisim olarak intikalı hareket yapan çubuklara veya çubuk sistemlerine tesadüf edilir. Bu gibi çubuk veya çubuk sistemleri için uçlarındaki düğüm noktalarının ayrı ayrı izdüşüm denge denklemelerini yazmağa lüzum yoktur. Sulp cisim olarak intikalı hareket yapan kısmın heyeti umumiyesinin birden izdüşüm denge denklemelerini yazmak yeter. Normal binalarda aynı kattaki kolonların translasyonları eşit olduğundan kat kirişleri, bu durumdadırlar. Bu halde düşey doğrultuda hareket olmadığından düşey izdüşüm denklemi yazmağa lüzum yoktur.

Şimdi Relaxation metodunu pratikte büyük değeri olan bir probleme tatbik edeceğiz. Tekstil fabrikalarında suhunet ve rutubetin sabit tutulması için içeriye güneş ışığının doğrudan doğruya girmesi istenmez. Bu sebepten sed pencereleri kuzey yarımküresinde kuzeye yönlü olarak tertiplenir. Ortaya testere dişi şeklinde mütemadi bir çerçeveye çıkar. Bu çerçeveyenin ilk iki kolunu hariç, diğerlerinin translasyon miktarları birbi-

rinden farklıdır. Bu sebepten problemin diğer iterasyon metotları ile çözümü büyük güçlük gösterir.

Relaxation metodu ile problemin çözümü için B, D, E, G, H, L, M, P, R, T, U, Z, düğüm noktalarında 12 adet moment denge denklemi, sulp cisim olarak intikalı hareket yapan BD, EG, HL, MP, RT, UZ, çubuklarının iki ucularına mücavir çubukların (kolonların) tatbik ettikleri kesme kuvvetlerinin tesiri altında bu mail çubukların dengesini ifade eden altı adet yatay izdüşüm denge denklemi yazılmıştır. Tablo 1, son kolon hariç, diğerlerindeki katsayılar konstrüksiyonun ebadına bağlıdır. Son kolon yük ile ilgilidir. Yük değiştiği zaman tabloda yalnız bu kolon değişir. Konstrüksiyonun eb'adına bağlı olan katsayılar Maxwell teoremi dolayısıyla asal diyagonale nazaran simetrikdir.

Tablodan  $\theta$  ve  $\delta$  ları hesaplamak için takip edilecek birkaç iterasyon yolu vardır. Bir tanesi şu şekildeidir: Birinci satırda  $\theta_B$  yi bulmak isteyelim  $\theta_D$  ve  $\delta_1$  i

$$\frac{-17,38}{\text{sıfır kabul edelim. } \theta_B = \frac{3,533}{\text{buluruz.}}}$$

$\theta_B$  nin bu değerini ikinci ve 13 üncü satırlarda yerlerine koyalım; ikinci satırda  $\theta_E$ ,  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  yi sıfır kabul ederek  $\theta_D$  için adedi bir değer buluruz. Bu ameliyeyi müteakip satırlarda tekrarlamak suretiyle ilk devirde  $\theta$  ve  $\delta$  lar için takribi bir değer bulunmuş olur. İkinci devirde  $\theta$  ve  $\delta$  lar için kullanılacak takribi değerler artık sıfır değildir. Birinci devirde bulduğumuz değerlerdir. Bunlardan istifade ederek ikinci devirde bulacağımız değerler hakikate daha yakın olurlar.

Bu ameliyinin kolaylıkla içrası için şu şekilde bir tablo tanzim edilir: (2 No. 1 Tablo). Bu tablonun satır ve sütün sayısı bir numaralı tablonun aynıdır. Asal diyagonal üzerindeki hanelere hiçbir sayı yazılmaz. (1 No. 1 tablonun) herhangi bir satırındaki bir haneyi düşünelim. Bu hanedeki  $\theta$  yahut  $\delta$  nin bir katsayısi vardır. Bu katsayı kendi sütunu üzerindeki asal diyagonalde mevcut  $\theta$  veya  $\delta$  nin katsayısına bölünüür. Bulunan rakam, işaretini değiştirilerek 2 No. 1 tabloda aynı hanenin üst köşesine yazılır. Bu sayılar 2 No. 1 tabloda kendi hanesinde kalın çizgili dikdörtgenler içinde gösterilmiştir. Bundan sonra 1 No. 1 tablonun birinci satırında (diyagonal üzerindeki hane hariç), diğer hanelerde  $\theta$  ve  $\delta$  lar sıfır kabul edilerek bulunacak rakamlar toplanır. Toplamda  $\theta$  ve  $\delta$  ların bulunacağı hanelerdeki rakamlar sıfır olacağı için yalnız yük sabitleri hanesindeki rakam toplamı teşkil etmiş olur. Bu rakam (2 No. 1 tablonun) birinci sütununda kalın dikdörtgenler içinde gösterilen rakamlarla çarpılarak hemen altlarına yazılır.

Bu şekilde iterasyona devam edilir. Misalimizde iterasyonun 4 üncü devrinde bulunan  $\theta$  ve  $\delta$  larla elde edilen momentler % 2 ye yakın hata ile doğrudurlar.

Bu problemde yük olarak sabit yüklerle, kolon başlarına soldan tesir eden zelzele kuvveti ve ilk kolo-

**...İNCELEMELER**

	$\theta_B$	$\theta_D$	$\theta_E$	$\theta_S$	$\theta_Y$	$\theta_L$	$\theta_M$	$\theta_P$	$\theta_R$	$\theta_T$	$\theta_U$	$\theta_Z$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	<b>Yük sabitleri</b>			
$\sum M=0$ $\Sigma_B$	-0,275 +7,40 +9,50 +10,20 +10,40												-0,06 +0,13 +0,12 +0,11 +0,11						17,38			
$\sum M=0$ $\Sigma_D$	-0,425 -7,40 -10,60 -11,50 -11,75	-0,174 -4,04 -5,40 -5,75 -5,88											+0,410 -0,385 -0,84 +0,44 +0,86 +0,29 -0,79 +0,15 -0,72 +0,07						-19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_E$		-0,149 +3,94 +5,07 +5,43 +5,53	-0,275 +7,45 +9,30 +9,90 +10,10										+0,547 -0,385 -1,15 +0,44 -1,14 +0,29 -1,05 +0,15 -1,96 +0,07						+19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_F$			-0,326 -7,56 -10,10 -10,80 -11,02	-0,174 -4,04 -5,46 -5,85 -5,98									+0,288 -0,385 -0,32 +0,21 -0,22 +0,08 -0,11 -0,04 -0,05 -0,12						-19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_H$				-0,148 +3,96 +4,95 +5,30 +5,37	-0,278 +7,45 +9,30 +9,95 +10,15								+0,385 -0,385 -0,44 +0,21 -0,29 +0,08 -0,15 -0,04 -0,07 -0,15						+19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_L$					-0,326 -7,56 -10,20 -10,95 -11,20	-0,174 -4,04 -5,50 -5,90 -6,02							+0,288 -0,385 -0,16 +0,74 +0,06 +0,03 +0,03 -0,17 +0,09 -0,25						-19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_M$						-0,148 +3,96 +4,95 +5,30 +5,40	-0,278 +7,43 +9,33 +10,03 +10,20						+0,385 -0,385 -0,21 +0,14 -0,08 +0,03 +0,04 -0,17 -0,21						+19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_P$						-0,326 -7,56 -10,30 -11,03 -11,27	-0,174 -4,04 -5,50 -5,86 -5,99						+0,288 -0,385 -0,11 +0,12 -0,02 -0,34 +0,12 -0,44 +0,19 -0,43						-19,25			
$\sum M=0$ $\Sigma_R$							-0,148 +3,96 +4,97 +5,35 +5,43	-0,278 +7,45 +9,45 +10,02 +10,19						+0,385 -0,385 -0,14 +0,12 -0,03 -0,34 +0,17 -0,44 +0,25 -0,43						+19,25		
$\sum M=0$ $\Sigma_T$							-0,326 -7,56 -10,30 -10,98 -11,23	-0,174 -4,04 -6,00 -6,43 -6,51						+0,288 -0,556 -0,09 -0,32 +0,26 +0,08 +0,33 -0,06 +0,32 -0,07						-19,25		
$\sum H=0$ $\Sigma_u$								-0,748 +3,96 +5,03 +5,33 +5,42	-0,395 +10,60 +12,10 +12,35 +12,43						+0,385 -0,556 -0,12 -0,32 +0,26 -0,08 +0,33 -0,06 +0,32 -0,07						+19,25	
$\sum M=0$ $\Sigma_z$								-0,326 -7,56 -11,20 -12,05 -12,20	-0,174 -4,04 -6,00 -6,43 -6,51						+0,139 -0,08 +0,34 -0,02 +0,44 -0,06 +0,43 -0,07						-19,25	
$\sum T=0$ $\Sigma_{BD}$	-0,030 -0,51 -0,75 -0,87 -0,83	+0,133 -3,54 -4,56 -4,88 -4,97	+0,209 +4,85 +6,48 +6,90 +7,06										-0,308 -0,35 -0,23 -0,12 -0,06						-2,90			
$\sum T=0$ $\Sigma_{EG}$		-0,178 +4,74 +6,10 +6,53 +6,65	-0,209 -4,85 -6,45 -6,90 -7,06	+0,133 -3,54 +4,85 +6,56 +7,03	+0,209 +0,133 +0,209								+0,437 -0,92 -0,91 -0,84 -0,77	+0,308 -0,17 -0,06 +0,03 +0,10						-1,40		
$\sum T=0$ $\Sigma_{HL}$			-0,178 +4,76 +5,96 +6,35 +6,46	-0,209 -4,85 -6,56 -6,90 -7,06	+0,133 -3,54 +4,85 +6,60 +7,07	+0,209 +0,133 +0,209							+0,308 -0,35 -0,23 -0,12 -0,06	+0,308 -0,12 -0,02 -0,13 -0,20						-1,40		
$\sum T=0$ $\Sigma_{MP}$				-0,178 +4,76 +5,96 +6,35 +6,46	-0,209 -4,85 -6,56 -6,90 -7,19	+0,133 -3,54 +4,85 +6,60 +7,23	+0,209 +0,133 +0,209							+0,308 -0,35 -0,23 -0,12 -0,06	+0,308 -0,17 -0,06 +0,03 +0,10						-1,40	
$\sum T=0$ $\Sigma_{RT}$					-0,178 +4,76 +5,97 +6,43 +6,53	-0,209 -4,85 -6,60 -6,90 -7,04	+0,133 -3,54 +4,85 +6,60 +7,04	+0,209 +0,133 +0,209						+0,308 -0,35 -0,23 -0,12 -0,06	+0,308 -0,12 -0,02 -0,13 -0,20						-1,40	
$\sum T=0$ $\Sigma_{UZ}$						-0,178 +4,76 +5,97 +6,43 +6,53	-0,209 -4,85 -6,60 -6,90 -7,20	+0,133 -3,54 +4,85 +6,60 +7,20	+0,209 +0,133 +0,209						+0,308 -0,35 -0,23 -0,12 -0,06	+0,308 -0,10 +0,26 +0,06 +0,35 +0,05						-0,912

**TABLO : 2**

na soldan tesir eden rüzgâr kuvveti alınmıştır. Normal binalarda (aynı katta & lar aynı) rüzgâr ve zelzele kuvvetlerinin soldan veya sağdan tesir etmeleri halinde kesitlerdeki tesirler mutlak değerde değişmez. İşaretçe değildir. Bu sistemde mutlak değerce de değişir. Onun için bu sistemin Kani metodu ile çözümü mümkün değildir.

Kleinlogel'in meşhur kitabında bu çeşit problemlerin çözümü için yüzlerce emsalin hesabı icabetmektedir. Bu kadar çok emsalin hesabı adedî hata yapılması muhtemeldir. Hesabin devamı sırasında yapılan hatanın kendi kendine kontroluna imkân yoktur. Halbuki Relaxation metodunda iterasyon sırasında yapılacak herhangi adedî bir hata iterasyonun müteakip devrinde kendiliğinden meydana çıkar; istenirse hatâlı devir tashih edilerek hesap yeniden yapılır, yahut da tashih yapılmadan hesaba devam olunur.

Iterasyonun müteakip devirlerinde bu hatâ erir gider. Ancak iterasyon birkaç devir uzamış olur. Diğer iterasyon metodlarından Kani metodu da bu hassayı izdir.

Eğri eksenli ve prizmatik olmayan çubuklardan müteşekkil sistemlerin denge denklemleri yukarıdakilere benzer lineer cebrik denklem takımı halinde olduğundan bunlara da Relaxation metodu ile çözülebilmektedir.

Relaxation metodu âdi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilen bazı inşaat mühendisliği problemlerine de tatbik edilmiştir. Bunun için özel eserlere müracaat zaruridir. Misal olarak : Silindirik kabukların bu metodla hesabı Doktor Mühendis Enver Çetmeli'nin «Silindirik kabukların Relaxation metodu ile çözümü» adındaki doktora kitabında incelenmiş ve semalar halinde verilmiştir.

### STANDARTLARIMIZ

