Elemanter Plâstisite ve Limit Analiz Metodu ile Boyut Tayini

Yazan :
Orhan ÜNSAÇ
Prof. Y. Müh.

O

1) **Giriş :** Son yirmi sene içinde, bir çok Avrupa memleketlerinde (Limit Analiz Metodu) veya aynı mânaya gelen (taşıma gücü esasına dayanan metod) ile yük taşıyan eleman ve sistemlerin boyutlandırılması (eb'atlandırılması) sık bahsedilen ve kullanılan bir konu olmuştur. Bu yazının hazırlanmasında (Mühendislik Haberlerinde), Madrid Betonarme Kongresi dolayısiyle çıkmış bir makale, teşvik edici bir sebep olmuştur.(*) Aşağıda takdim olunan incelemede ilk evvel elemanter plâstisiteye ait bazı problemler incelenecek ve bundan sonra (Limit Analiz) veya (Taşıma Gücü) esasına göre (Boyut tâyini = Eb'at tâyini) ile ne kast olunuyor? ve bu metodun dayandığı görüş nedir? gibi sorular cevaplandırılacak ve bazı problemler halledilerek konuya son verilecektir.

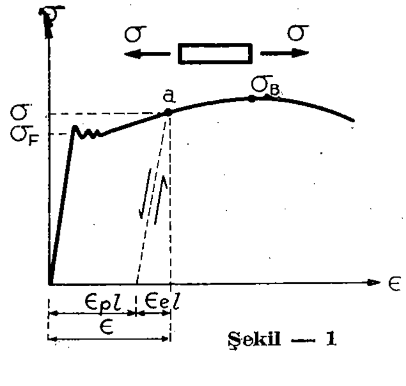
2) **Plâstik Şekil Değişimi ve Kriterleri :**

Kuvvetler tesiri altında bulunan bir katı cisimde bazı şekil değişimlerinin meydana geleceği ve bu kuvvetlerin zail olması halinde, şekil değişimi de zail olursa, bu tip deformasyona (Elâstik Şekil Değişimi) dendiği malûmdur. Şayet kuvvetlerin zail olması (Bu hale boşalma diyeceğiz) şeklinde şekil değişimi zail olmuyorsa bu şekil değişimine (Plâstik Şekil Değişimi) denir.

Genel olarak mühendislikte kullanılan metal ve metal alaşımı (halitası) cinsinden malzemede (Elâstik ve Plâstik Şekil Değişimleri) bir arada bulunur. Misâl olarak (Şekil : 1) de görülen çelik bir çekme çubuğu için elde edilmiş bulunan (σ , ε) eğrisi alınırsa gerilmenin σ_f ile gösterilen (akma sınırı) ndan daha büyük bir değeri için elde olunan ε birim uzamasının bir kısmı kuvvetin boşalması halinde zail olur ki buna (birim uzamanın elâstik bileşeni) denir. Zail olmayan kısma da (birim uzamanın plâstik bileşeni) denir ve bu bileşenler sıra ile ε_{el} ve ε_{Pl} ile gösterilirse :

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{Pl}$$

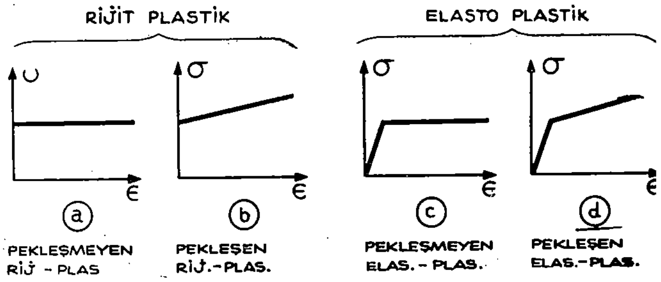
olur, (Şekil : 1). Keza şekilde görüldüğü gibi elâstik



Şekil — 1

sınır aşılarak bir (a) noktasına kadar çekilerek boşaltılmış bir çubuk baştan yüklenecek olursa (virjin malzemedeki)** σ_f akma sınırının (a) noktasındaki değere kadar yükseldiği görülür ki bu hâdiseye (pekleşme = Ecrouissage) dendiği de malûmdur. Tatbikatta, hattâ günlük hayatımızda metal sınıfından malzemedeki bu (plâstik şekil değişimi özelliğinden) sık sık faydalanırız. Meselâ, eğrilmiş bir çivinin düzeltilmesi, çelik veya metal levhalarda delik açılması, firketelerin bükülmesi v.s. gibi. Şekil : 1 in tetkikinden de görüleceği gibi, elâstisite sınırından öteye (σ , ε) eğrisinin şekli artık bir doğru değildir ve kompleks bir eğriden ibarettir.

İşte hesaplarda kolaylık olsun diye (Şekil : 1) de görülen (σ , ε) eğrisi yerine, buna mümkün mertebe uyan ve benzeyen basit eğriler alınır ki bu eğrilerin gösterdiği cisimlere (İdeal Cisim) denir, ve bunlar aslında tabiatta mevcut olmayan ve fakat özellikleri hakikî cisimlere benzeyen cisimlerdir. (Şekil : 2) de a, b, c, ve d eğrileri ile belirtilen bazı ideal cisimler verilmiş bulunmaktadır. Bunlardan a eğrisi (pekleşmeyen rijit plâstik), b eğrisi (pekleşen rijit plâstik), c eğrisi (pekleşmeyen elasto-plâstik) ve d eğrisi (pekleşen elasto-plâstik) malzemeyi göstermektedir.



Şekil : 2

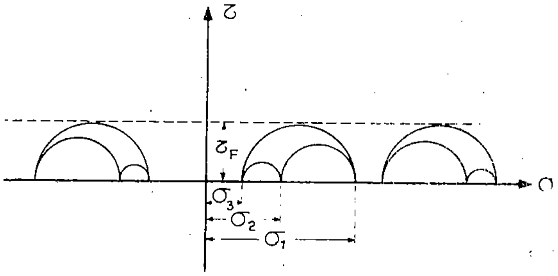
İşte plâstik şekil değişimi incelenirken, mühendislikte çok kullanılan çelik metal ve metal alaşımları için c ve d tipi (ideal cisimleri), bu malzemenin (σ , ε) eğrisine çok yakın olacağından, tercihan bunlar kullanılacaktır. Bir boyutlu gerilme hali için belirtilen bu hususlar iki ve üç boyutlu haller için de bazı genelleştirmeler yapılarak kullanılabiir. Üçgen gerilme halinde plâstik şekil değişiminin başlangıcı (Guest) kırılma teorisi ile başladığı kabul edilir. Buna göre üçgen gerilme halinde τ_{max} gerilmesi, basit kayma halindeki τ_f akma kayma gerilmesi eşit olunca plâstik şekil değişimi başlar. Yani kısaca plastisite şartı :

$$\tau_{max} = \tau_f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(*) Muhittin Toköz : Avrupa Beton Komitesi, Türkiye Mühendislik Haberleri sayı 70, 1 Ocak 1961, sahife 18.

(**) Virjin malzemeden maksat (elastik sınırdan büyük bir gerilme elde edilinceye kadar yüklenmiş ve sonra boşaltılmış olmayan) malzemedir.

dir.[1] Gerilme hali (Mohr) daireleri ile gösterilecek olursa, plâstik şekil değişiminin başlangıcına tekabül eden hallerde, hep en dıştaki (Baş dairenin) $\tau = \tau_f$ doğrusuna teget olacakları görülür. Şekil : 3. Keza şeklin tetkikinden, en küçük asal gerilme σ_3 ve en büyük asal gerilme σ_1 ise (plâstisite şartının) σ_2 ile



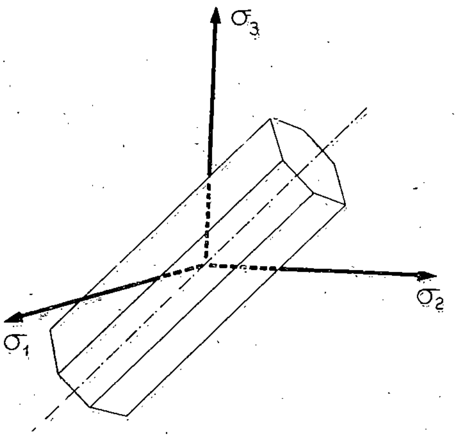
Şekil — 3

gösterilen (asal gerilmeden müstakil) olacağı görülür. En evvel Fransız bilginlerinden Tresca tarafından verilen bu (1) şartı :

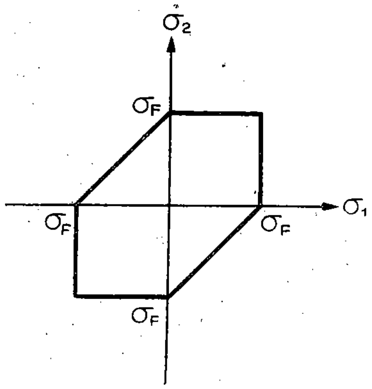
$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\,\tau^2_f \right] \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\,\tau^2_f \right]$$

$$\left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau^2_f \right] = \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

şeklinde ifade edilmiş idi. Şayet, katı cisim içindeki herhangi bir noktadaki gerilme hali, σ_1, σ_2, ve σ_3 asal gerilmeleri ile verilmiş ise, kolaylık olmak üzere, bu noktalardaki gerilme halleri şekil : 4 de görüldüğü gibi : σ_1, σ_2 ve σ_3 karteziyen eksen takımında koordinatları (σ_1, σ_2 ve σ_3) olan birer nokta ile karekterize edilebilir. Bu duruma göre, (1) ve (2) ifadeleri ile verilmiş plastisite şartını sağlayan noktalar, şekilde görülen bir altıgen, prizmatik yüzeyin yanal yüzlerinde bulunur, ve yüzeyin ayırtlarının doğrultman kosinüsleri birbirine eşit olup $1/\sqrt{3}$ dür. (Bu sonuç (2) ifadesinin analitik geometriden faydalanarak yapılacak tefsiri ile elde edilir). Bu prizmatik yüzeyin içine rastlayan noktalar (elâstik şekil değişimi bölgesini) gösterir. Dışındaki noktaların ise (pekleşmeyen ideal elasto - plâstik) cisimler için bir mânası yoktur. Özel olarak $\sigma_3 = 0$ düzlemi ile bu yüzeyin ortak kesidi (Şekil : 5) de görülen altıgeni verir. $\sigma_3 = 0$ hali düzlem gerilme haline tekabül eder ve bu hal için bulunan altıgene (Tresca altıgeni) denir. İçindeki noktalar (elastik şekil değişimine tekabül eden gerilme hallerini) verir, keza çevredeki noktalar (plâstik şekil değişimine tekabül eden gerilme hallerini) verir.



Şekil — 4



Şekil : 5

Özel olarak $\sigma_2 = 0$ noktası basit çekme halinde plâstik şekil değişimi başlangıcını verir ki bu da bir boyutlu halde ($\sigma = \sigma_f$) olması ile (σ_f, basit çekme halindeki akma sınırıdır) plâstik şekil değişiminin başladığını gösterir ki ($\tau_{max} = \tau_f$) şartı da aynı hususu gösterir. Keza ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_f$ noktası ve $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = -\sigma_f$ ve $\sigma_2 = \sigma_f$, $\sigma_1 = 0$ basit çekme ve basınç hallerinde plâstik şekil değişiminin başlama şartını göstermektedir. Basitliği dolayısı ile çok kullanılan $\tau_{max} = \tau_f$ plâstikleşme şartı yerine, bazan (Huber) [3] tarafından evvelâ ileri sürülmüş ve fakat kitaplarda (Misés plâstikleşme) şartı[2] diye bahsedilen plâstikleşme şartı kullanılır. Bu şart, deformasyon sırasında birim hacımdaki bir elemanın yaptığı (Distorsiyon işi = Biçim değişimi işi) nin sınırlı bir değere erişmesi ile plâstik şekil değişiminin başlıyacağını ileri sürer. Yâni, bu iş Ag ile gösterilirse σ_1, σ_2, σ_3 asal gerilmeleri ile verilmiş bulunan bir üçgen gerilme halinde ;

$$A_g = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)_2 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ifadesinin sınırlı bir değere erişmesi ile plâstik şekil değişimi başlıyor kabul edilir. Burada ν büzülme katsayısı olup (m) Paisson katsayısı olmak üzere

$\nu = \dfrac{1}{m}$ dir. Plâstik şekil değişimi için Ag nin eşit

(1) J. I. Guest : On the Strength of ductil Materials under Combined Stress Phil. Magazine, sér. 51, t. 50,900 sahife, 67.

(2) H. Tresca : Mémoire sur l'écoulement des corps solides. (Mém. prés. par div sav., t. 18,1868 sahife 75, t. 20, 1872 sahife 169)

(3) M. T. Huber : Czasopismo technizne 1904, Lwov (Lemberg)

(4) Misés, R. Von : Mechanik der festen Körper im plastisch - deformablen Zustand, Nachr. d. Wissensch. zu Göttingen, Math. Phys. Klasse 1913.

olacaqı sınır değer, basit çekme halinde de hep aynı olacaqından ve basit çekme halinde plâstik şekil değişimi $\sigma = \sigma_f$ olması ile başladığından bu hal için yukarıki 3 ifadesinde $\sigma_2 = O$, $\sigma_3 = O$ ve $\sigma_1 = \sigma_f$ konularak basit çekme halinde :

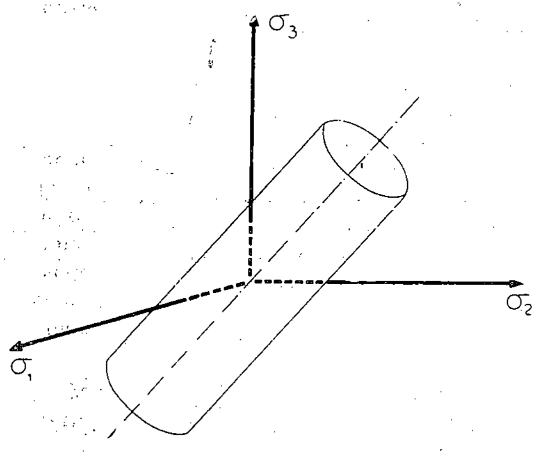
$$A_g = \frac{1 + \nu}{3 E} \sigma^2_f$$

bulunur. Şu halde (Hüber) tarafından bulunmuş olan ve (Misés Plâstikleşme şartı denen) şart, (3) ile (4) ü karşılaştırarak :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma^2 f \quad . \quad . \quad (5)$$

bulunur.

Şekil 4 de yapıldığı gibi σ_1, σ_2, σ_3 ile verilmiş üçgen gerilme hali, bir karteziyen eksen takımından kordinatları σ_1, σ_2 ve σ_3 olan noktalar ile belirtilecek olursa, (5) ifadesi ile verilen (Misés) plâstikleşme şartını sağlayan noktaların (Şekil : 6) da görülen silindir yüzey üzerinde bulunacağı kolayca görülebilir. (Analitik geometriye müracaat!). Bu duruma göre silindir yüzeyin içinde bulunan noktalar (elâstik şekil değişimine) tekabül eder, ve dışındaki noktaların (pekleşmeyen elasto-plâstik) malzeme için bir fizik mânası yoktur!

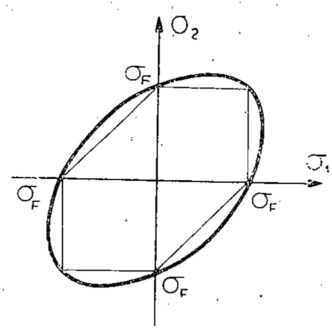


Şekil : 6

Özel olarak düzlem gerilme hali alınırsa meselâ $\sigma_3 = O$ hali için (Şekil : 6) daki silindirin $\sigma_3 =$ düzlemi ile ortak kesidi alınırsa (Şekil : 7) deki ellips bulunur ve bu ellipsin denklemi, (5) denkleminde $\sigma_3 = O$ yazarak :

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma^2_f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

bulunur, şekil 7. Bu ellipsin içindeki noktaların koordinatları elâstik şekil değişimine tekabül eden gerilme hallerini verir, ve çevresindeki noktalar (plâstik şekil değişimine) ait gerilme hallerini gösterir. Düzlem gerilme hali için bulunmuş (şekil : 5) deki (Tresca altıgeni) ile bu ellips üst üste konulursa her iki (plâstikleşme) kriterinin mukayesesi yapılmış olur, ve buradan da görülür ki basit çekme ve basınç hallerinden her iki (kriter) de aynı sonucu vermektedir. Keza asal gerilmelerin eşit olmasına tekabül eden gerilme hallerinde de iki kriter de aynı sonucu vermektedir.



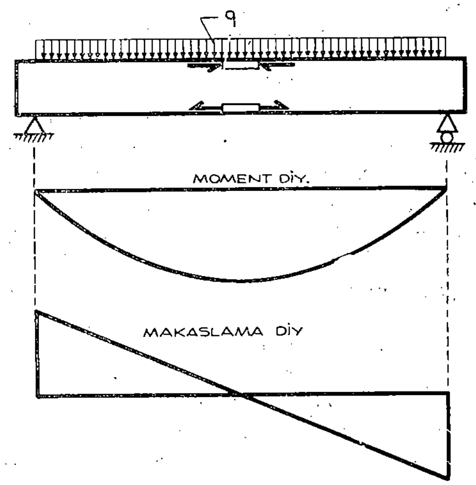
Şekil : 7

İşte, yukarıda görülen bu kriterlerden sonra (plâstik şekil değişiminin) diğer özelliklerini de incelemek icabeder ki aşağıda incelenecek elemanter problemlerde kullanılmıyacağından burada temas edilmiyecektir[1].

3) **Eğilme Halinde Plâstik Şekil Değişimi :**

a) İki mesnede oturan basit kirişlerde simetrik eğilme :

(Simetrik Eğilmeye) mâruz kirişlerde gerilmenin maksimom olduğu kesitte, eğilme momenti maksimomdur, ve kesme kuvveti sıfırdır. Bu itibar ile, Şekil : 8 de görüldüğü gibi, buradan alınacak prizmatik parçalar, bir boyutlu gerilme halinde olup ya basit çekmeye maruzdur veya basit basınca maruzdur. Bu



Şekil — 8

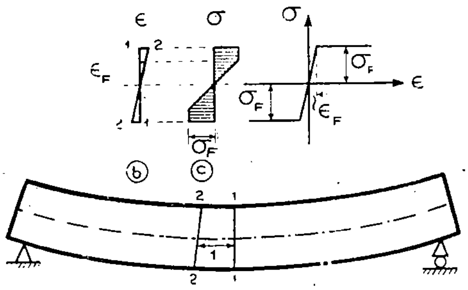
durumda elâstik şekil değişimi yapmış bir kirişte yükler artacak olursa, bir an gelir ki ($\sigma_{max} = \sigma_f$) olur. Bu halde plâstik şekil değişimi de başlar. Tabiatiyle gerilmenin maksimom olduğu kesitte alınacak eleman-

(1) Bu kısım için Türkçede şu çalışmaya müracaat ediniz : İ. T. Ü. Makina Fakültesi konferansları kitabı, 1958, (Orhan Ünsaç : Plastik şekil değişimi mekanizması ve teorisi, sahife 93)

lar basit çekmeye veya basit basınca mâruz kaldığından plâstikleşme kriterlerinden gerek Tresca kriteri ve gerekse Misés kriteri Şekil : 7 de görüldüğü gibi aynı sonucu verecektir, yani ($\sigma_{max} = \sigma_f$) olması ile plâstik şekil değişimi başlıyacaktır. Bu hale tekabül eden moment değeri Mf ile gösterilirse :

$$\sigma_{max} = \sigma_f \longrightarrow \sigma_f = \frac{M_f}{W} \longrightarrow M_f = \sigma_f \, W \quad . \quad . \quad (7)$$

olur. Burada (W) kesit mukavemet momentidir, ve Mf ile gösterilen moment değeri hususî bir önemi haizdir, zirâ elâstik sınırın bitimine tekabül eden yüklemeyi verir. İşte bu Mf momentine tekabül eden yükleme qf ile gösterilirse, yüklemenin bu sınırı geçmesi halinde plâstik şekil değişimi kiriş içinde yayılacaktır. Bu durum incelenirken elâstik şekil değişiminde olduğu gibi (Elasto-plâstik) şekil değişimi safhasında da deformasyon sırasında (kesitlerin düzlem kaldığı) kabul edilir. Bu duruma göre M eğilme momenti Mf i geçerse, bu takdirde M_{max} ın tesir ettiği kesit hizasında 1-1 ve 2-2 gibi birbirinden birim mesafede iki kesit alınırsa, tarafsız eksenin üstünde ve altında ve birim uzun-



Şekil — 9

luktaki liflerin uzama ve kısalmasını tâyin için 2-2 kesiti bir öteleme hareketi ile 1-1 kesiti üzerine getirilir ve şekil : 9b deki durum elde edilir. Bu uzama ve kısalmalar, birim uzunluktaki ve eksene parele liflerin uzama ve kısalmaları olduğundan, doğrudan doğruya

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$ birim uzama kısalmaları olur. Keza şekil değişimi sırasında (kesitler düzlem kalır) kabulü yapıldığından ε birim uzama ve kısalmaları tarafsız eksenden itibaren lineer olarak yayılır. Gerilme dağılışını bulmak için, kiriş malzemesine (σ , ε) eğrisinden, bulunur ve ε lar hizasında gösterilirse Şekil 9c deki gerilme dağılışı elde edilir. Hemen denge şartlarından :

$$\int_f \sigma \, df = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

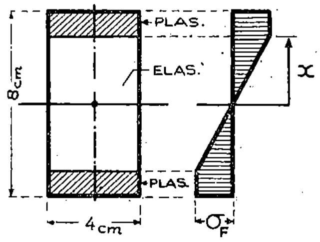
ve

$$\int_f \sigma \, y \, df = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

bulunur. Burada (8) ifadesi tarafsız ekseni tâyine yarar ve (9) ifadesi de eğilme momentini verir, veya eğilme momenti malûm ise plâstik bölgeyi verir.

Misâl : Şekilde görülen kesit (Elasto-plâstik) pekleşmeyen malzemeden olup M = 104000 kg. cm lik eğilme momentine mâruzdur. $\sigma_f = 2000$ kg/cm² olduğunu ve dikdörtgen kesit boyutları $4_{cm} \times 8_{cm}$ olduğuna göre plâstik bölgeyi elâstik bölgeden ayıran hattın tarafsız eksenden (χ) mesafesini tâyin ediniz.

Cevap : Kesit simetrik olduğundan, bu elasto - plâstik şekil değişimi hali için tarafsız eksen, ağırlık merkezinden geçer ve (8) denklemini kullanmağa lüzum yoktur!



Şekil — 10

Plâstik bölgenin (χ) mesafesini tâyin için (9) denklemi kullanılırsa :

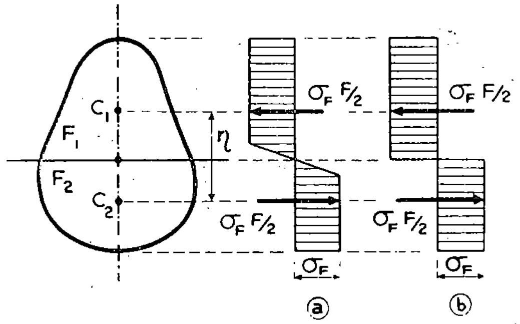
$$\int_f \sigma \, y \, df = M \longrightarrow 104000 = \frac{4 \times (2x)^2}{6} \cdot 2000 + 4\,(4 - x)\,(4 + x)\,2000$$

bu ikinci derece denkleminden :

$$\chi = 3_{cm}$$

bulunur.

İşte yukarıki misâlde görüldüğü gibi M eğilme momenti daha da artmakta devam ederse, kesit baştan aşağı plâstik şekil değişimine mâruz kalıncaya kadar M eğilme momenti artmakta devam edebilir ve neticede, pekleşmeyen elasto-plâstik malzeme için Şekil : 11a daki gerilme dağılışı elde edilir ki, tatbikatta bu şekil 11b deki gibi alınabilir.



Şekil — 11

Bu duruma göre, denge denkleminden izdüşüm denklemi tatbik edilirse :

$$\int_f \sigma \, df = \longrightarrow \sigma_f F_1 - \sigma_f F_2 = O$$

veya

$$F_1 = F_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

bulunur. Burada F_1 ve F_2 tarafsız eksenin üst ve alt taraflarında kalan kesit bölgeleridir. Bu denklemden faydalanarak tarafsız eksen tâyin edilir. Görülüyor ki, tarafsız eksen (pekleşmeyen elasto-plâstik) malzeme için, kesiti tam plâstik şekil değişimi olması halinde F_1 ve F_2 gibi idantik iki kısma bölmektedir.

Keza, tam plâstik şekil değişimi halinde, pekleşmeyen elasto-plastik malzemede, eğilme momentinin bu değeri alabileceği en büyük değer olup, denge denklemlerinden moment denklemi Şekil : 11b deki gerilme dağılışı için yazılırsa :

$$M_u = \int_f \sigma\, y\, df = \sigma_f \cdot \frac{F}{2} \cdot \eta \quad . \; . \; . \; (11)$$

bulunur. Burada M_u momentin bu en büyük değerini, F kesit alanını, η gerilme diyagramındaki, basınç ve çekme bölgelerindeki bileşke kuvvetlerin manivelâ kolunu göstermektedir. Bu durum için kesitin her yerinde gerilme σ_f olduğundan çekme ve basınç mıntıkalarındaki bileşkelerin tatbik noktaları, kesitin tarafsız eksenin üst ve alt kısımlarındaki parçalarının C_1 ve C_2 ağırlık merkezleri olur (Şekil : 11).

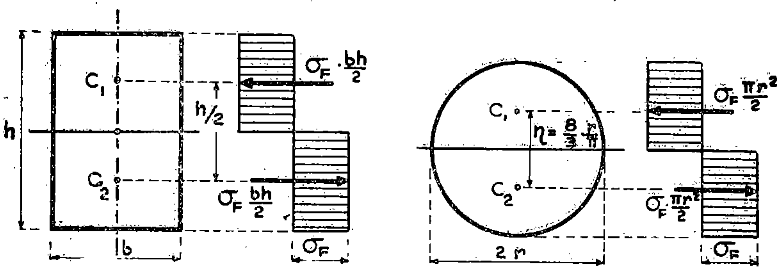
(Limit analiz metodu) veya (taşıma gücü esası) denen metoda göre kesit boyutu tâyininde bu M_u momentleri hususî bir önemi haizdir. Dikdörtgen kesit için M_u momenti :

$$M_u = \sigma_f \cdot \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_f \frac{bh^2}{4} \quad . \; . \; . \; (12)$$

bulunur. Şekil : 12. Keza daire kesit için :

$$M_u = \sigma_f \cdot \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = \frac{4}{3} \sigma_f r^3 \quad . \; . \; (13)$$

olur. Şekil : 12. İşte, (Limit analiz metodu ile kesit) tâyininin esası, meselâ kirişlerde bu M_u momentini hesap ederek bundan bir (n) emniyeti ile uzak kalmak esasına dayanır, (yazının 3. kısmına müracaat ediniz).



Şekil — 12

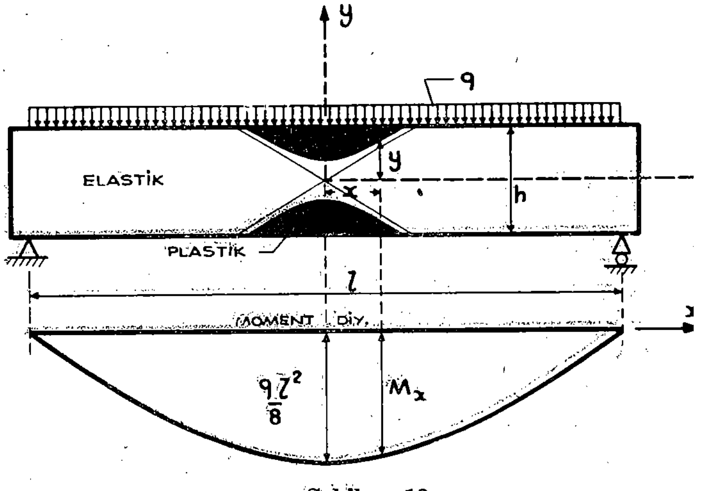
Plâstik şekil değişiminin buraya kadar olan incelemede görülen kısmı, kesit içindeki duruma aittir, yani kesit içinde alınan entegral ile incelenen bir kısımdır.

Tatbikatta, kiriş uzunluğu boyunca, plâstik şekil değişiminin yayılışının da bilinmesi hususî bir önemi haizdir.

Misâl olarak Şekil : 13 de görülen dikdörtgen kesitli kirişin üniform yükle yüklü olduğunu ve simetrik eğilme halinde elâstik kalan bölgeyi plâstik bölgeden ayıran eğrinin denklemini bulalım.

Şekilde seçilen eksen takımı için, üniform yayılı yük halinde, ortadan (χ) mesafede bulunan bir kesitteki M_x eğilme momenti :

$$M_x = \frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - \chi^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; (14)$$



Şekil — 13

ile ifade edilebilir. Diğer taraftan, ortadan (χ) mesafedeki bir kesitte, Şekil : 13 de görüldüğü gibi, plâstik bölge sınırı tarafsız eksenden y mesafede başlıyorsa, 9 No. ile gösterilen denge denkleminden faydalanarak yukarıki misâlde görüldüğü gibi M_x hesaplanırsa :

$$M_x = \int_f \sigma\, y\, df = \frac{\sigma_f\, b\,(2y)^2}{6} + b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{2} + y\right)\sigma_f \quad . \; . \; . \; (15)$$

bulunur. M_x yerine 14 ifadesindeki değeri vaz olunursa:

$$\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) = 2\sigma_f \frac{by^2}{3} + b\sigma_f\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad . \; . \; . \; (16)$$

bu ifade χ^2 ve y^2 ye göre tanzim olunursa :

$$\frac{y^2}{\dfrac{\sigma_f \cdot \frac{bh^2}{4} - \frac{ql^2}{8}}{b\,\sigma_f/3}} - \frac{x^2}{\dfrac{\sigma_f \cdot \frac{bh^2}{4} - \frac{ql^2}{8}}{q/2}} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; (17)$$

bulunur ki bu da plâstik mıntıkayı elâstik mıntıkadan ayıran eğrinin bir (Hiperbol) olduğunu gösterir.

Şekil : 14 de (q) nün çeşitli değerleri için plâstik bölgeler siyah olarak gösterilmiş bulunmaktadır.

Şayet kirişin ortasında yalnız bir münferit kuvvet olsaydı elâstik bölgeyi plâstik bölgeden ayıran eğri bir (parabol) gösterecektir ve bu parabolün denklemi, (15) ifadesinde M_x yerine, $M_x = P/2 \left(\frac{l}{2} - \chi\right)$ yazarak elde edilir ve :

$$\frac{2b\,\sigma_f}{3P} y^2 - \frac{2}{P}\left(\frac{bh^2}{4}\sigma_f - \frac{Pl}{4}\right) = x \quad . \; . \; . \; . \; (18)$$