Hız Potansiyelli Düzlemsel Permanant Hareketin Akım Çizgilerinin Relaxation Metodu İle Çizimi

Yazan :
Kanat DURGUN
Y. Müh.

UZAYIN herhangi sürekli bir Δ bölgesinde (Ş-1); A (x, y, z,), $\bar{U}$ (u, v, w) hız alanı ile tarif edilen bir akışkan elemanı merkezinin t anındaki konumunu; A (x, y, z), A merkezli yeni kartezyen sistemin U' (u', v', w') hız alanını haiz diğer bir elemanın aynı t anında; konumunu gösterdiğine göre; yeni (Ax, Ay, Az) eksen takımına göre u' nün bileşenleri

$$u' = u\,(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z})$$
$$v' = v\,(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z}) \qquad 1$$
$$w' = w\,(x+\bar{x},\, y+\bar{y},\, z+\bar{z})$$

şeklinde yazılabilir.

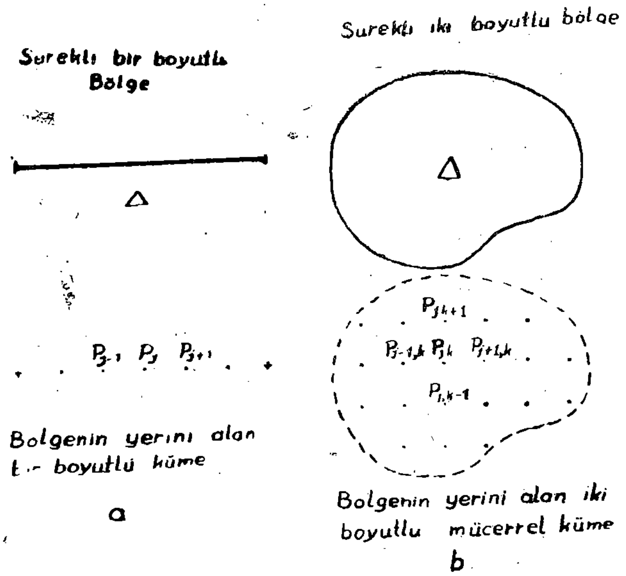
Bu ifadeler seriye açılırsa

$$u' = u\,(x,y,z) + u(x,y,z)\left(\bar{x}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) +$$
$$\frac{1}{2!}\,u(z,x,y)\left(\bar{x}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \qquad 2$$
$$+ \frac{1}{n!}\,u\,(x,y,z)\left(\bar{x}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n$$

ve büyük mertebe sonsuz küçüklükler birinci mertebe küçüklükler yanında ihmal edilirse ve diğer bileşenler için de benzer şekilde düşünülerek

$$u' = u + \bar{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial u}{\partial z} \qquad 3$$
$$v' = v + \bar{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$w' = w + \bar{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

ifadeleri bulunur.



(Şekil — 1)

Bu denklemlerin ikinci tarafındaki ilk u, v, w terimleri bir öteleme hareketine tekabül eder; diğer ifadelerin aşağıdaki yazılarla neye tekabül ettiklerini görebiliriz.

$$k_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad k_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad k_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad 4$$

$$w_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad w_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

(4) denklemlerinin aynı endislilerini bir defa toplayıp ve bir defa çıkararak neticeleri (3) denklemlerinde yerine koyarsa

$$u' = u + (w_y\,\bar{z} + w_z\,\bar{y}) + \bar{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{y}\,k_z + \bar{z}\,k_y$$
$$v' = v + (w_z\,\bar{x} - w_x\,\bar{z}) + \bar{y}\frac{\partial v}{\partial y} + \bar{z}\,k_x + \bar{x}\,k_z$$
$$w' = w + (w_x\,\bar{y} - w_y\,\bar{x}) + \bar{z}\frac{\partial w}{\partial z} + \bar{x}\,k_y + \bar{y}\,k_x$$

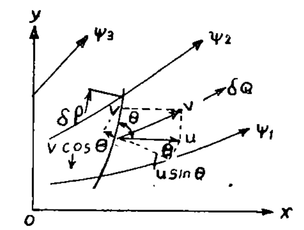
buluruz.

Burada U_d $(w_y\bar{z} - w_z\bar{y},\ w_z\bar{x} - w_x\bar{z},\ w_x\bar{y} - w_y$ A dan geçen ani bir dönme ekseni etrafında sıvı elemanının kütle halinde dönme hareketini gösteri geri kalan terimler (Ax, Ay, Az) eksenlerine nazaran Ω (w_x, w_y, w_z) hareketini yapan yeni A eksenlerine göre A' elemanının deformasyonunun bileşenleridir. Permanant hareketlerde w_x, w_y, w_z in sıfıra müsavi olduklarını biliyoruz; buradan $w_x = w_y = w_z = 0$ ve

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

(6) ifadeleri bütün Δ bölgesinde sağlanacak demekt

Şimdi düzlemsel akım çizgilerinin diferansiyel denklemini araştıralım. Bir düzlemsel potansiyel akımın çizilen akım çizgilerini ψ ile gösterirs (Ş-2a) Δ bölgesindeki bütün akım fonksiyonları i



(Şekil — 2 A)

$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ $\quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ 7 olacaktır. 7

Buradan $u\,dy - v\,dx = 0$ ve $\frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx = 0$

bulunur; bu ise ψ nin tam diferansiyeline eşittir.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \qquad 8$$

(8) bu denklem integre edilirse; akım çizgisi boyunca ψ = sabit olduğunu gösterir. Diğer taraftan;

$$\delta Q = (u \sin\theta - v\cos\theta)\,\delta\ell$$
$$= \left(u\frac{\delta y}{\delta\ell} - v\frac{\delta x}{\delta\ell}\right)\delta\ell$$
$$= u\,\delta y - v\,\delta x \qquad 9$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x$$
$$\delta Q = \delta\psi = \psi_{i+1} - \psi_i$$

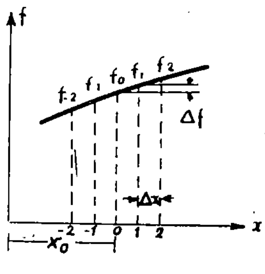
(9) dır O halde iki boyutlu akımlarda herhangi bir çift akım çizgisi arasındaki ψ değerlerinin farkının debiye eşit olacağı neticesi çıkıyor. (7) denklemlerinde ψ nin bulunan bu değerleri, permanant hareketlerin (6) denklemlerinde yerine konursa

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \qquad 10$$

(10) iki boyutlu kartezyen koordinatlar için Laplace denklemi bulunur. Vektör notasyonlarına göre bunun umumî şekli $\nabla^2\psi = 0$ ile gösterilmektedir. (*)

Bu kısmî differansiyel denklemin genel çözümü sınır şartlarının kompleksliği yüzünden güçtür; relaxation metodunun esası bu denklemin cebrik metodla çözülmesi esasına dayanır.

Relaxation metodunun bir akım nümûnesine tatbikini vermeden önce Laplace denkleminin sonlu fark denklemlerini çıkaralım. Uzayın sürekli verilen bir Δ bölgesinde her noktasında türevli bir $f = f(x)$ fonksiyonu düşünelim (Ş-2) ve bu fonksiyonun $x = x_0$ civarında $\frac{df}{dx}$ ini teşkil edelim.



Şekil — 2

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \lim_{\Delta x > 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_0 = \lim_{\Delta x > 0}\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \lim_{h>0}\frac{f_1 - f_0}{h}$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 \simeq \frac{1}{h}(f_1 - f_0 \quad .. \quad \frac{df}{dx} \simeq \frac{\Delta f}{h} = \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

fonksiyonunun x deki ilk farkı denir.

Ayrıca şu tarifleri verelim :

$\bar{\Delta} f = f(x+h) - f(x)$	İleri Fark	
$\underline{\Delta} f = f(x) - f(x-h)$	Geri Fark	11
$\Delta f = \frac{1}{2}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$	Orta Fark	

İkinci farklar içinde $x = x_0$ da

İleri Fark

Geri Fark

Orta Fark

$$(\bar{\Delta}^2 f)_0 = \bar{\Delta}(\bar{\Delta} f)_0 = \bar{\Delta} f_1 - \bar{\Delta} f_0 = f_2 - f_1 - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$$
$$(\underline{\Delta}^2 f)_0 = \underline{\Delta}(\underline{\Delta} f)_0 = \underline{\Delta} f_0 - \underline{\Delta} f_{-1} = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2} \qquad 12$$
$$(\Delta^2 f)_0 = \bar{\Delta}(\underline{\Delta} f)_0 = \bar{\Delta}(f_0 - f_{-1}) - f_1 - f_0 - (f_0 - f_{-1}) = f_1 - 2f_0 + f_{-1}$$

(12) denklemleri bulunur

Şimdi O noktasında sonlu fark denklemlerinin değerlerinin toplamından; Laplace denklemi için sonlu farklar denkleminin aşağıdaki şeklini tâyin ederiz. (Ş-3).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\Delta_x f}{2h}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\Delta_x^2 f}{h^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\Delta_y f}{2h}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\Delta_y^2 f}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)\right] =$$
$$\frac{1}{h^2}(f_1 - 2f_0 + f_3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left[f(x,y+h) - 2f(x,y) + f(x,y-h)\right] = \qquad 13$$
$$\frac{1}{h^2}(f_2 - 2f_0 + f_4)$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0) = 0$$

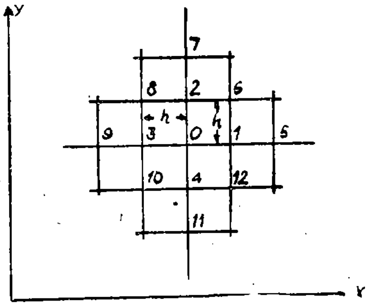
Aynı şartları haiz ψ için $\quad \psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{4}$

Bazı müellifler şekli bir notasyon kullanmışlar dır. (**). Bu hususta fazla mufassal malûmattan sarfınazar edilerek (Ş-4) de bu notasyonların ikinci mer-

---

∇ (*) Nabla ilk defa Hamilton tarafından 1847 de kullanıldı).

(**) Qart. J. Mech. Appl. Math. I 35, 42 1948, W.E. Milne Numerical solution of Differantial Equations P. 131. New York. 1953).



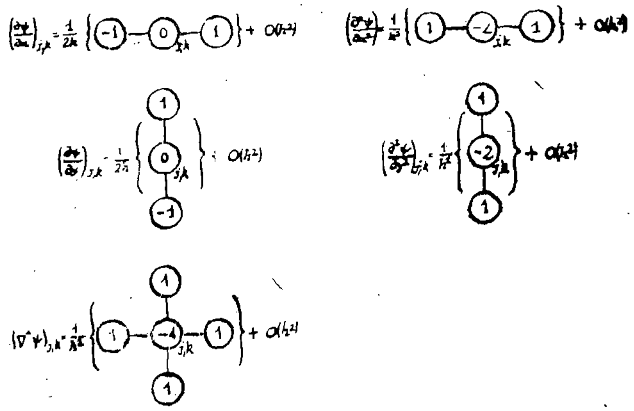
(Şekil — 3)

tebeye kadar tek ve iki boyutlu bölgeler için şekilleri resmedilmiştir.

Nazarı itibara alınan bölgenin boyutlarına göre Pjk veya Pj noktasında Laplacie'nin değerinin hesabı için mücerret noktalar düşünülür. Ş-4 de gösterilen notasyonlarda daireler içindeki sayılar o dairelere tekabül eden noktalardaki ψ değerleri ile çarpılacak demektir.

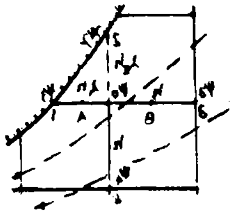
Şimdi herhangi bir potansiyelli iki boyutlu akım nümunesi seçelim; tayin edilecek ψ fonksiyonu her noktada $\nabla^2\psi$ yi sağladığı gibi sınır şartlarını da sağlamalıdır; bu halde tâyin edilecek ψ fonksiyonları akım çizgilerini verecektir.

Sınır şartlarını vazetmek için iç ve dış katı sınırların birer akım çizgisi ve dahilî sınırdan yeter uzaklıkta pratik olarak sınırların tesiri altında olmayan eşit potansiyel çizgilerinin başlangıç ve bitim sınırları olduğunu kabul etmek kâfidir. Ayrıca sınırların nor-



(Şekil — 4)

mâl şebekeye yakınlıkı sebebiyle h aralığının λ katı ($\lambda < \Lambda$) aralıklarının merkezî ω değeri üzerine tesirleri daha büyük olacağından böyle asimetrik haller için (13) denklemi yerine (Ş-5) den elde edilen; (14) denklemi kullanılacaktır.



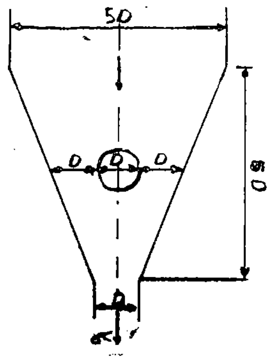
(Şekil — 5)

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_A = \frac{\psi-\psi_0}{\lambda_1 h} \quad .. \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_A - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_B}{h} = \frac{\psi_1-\psi_0(1+\lambda_1)+\psi_3\lambda_1}{\lambda_1 h^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\psi_2-\psi_0}{\lambda_2 h} \quad .. \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_2+\lambda_2\psi_4-\psi_0(1+\lambda_2}{\lambda_2 h^2}$$

$$\Delta^2\psi = 0 \quad .. \quad \psi_0 = \frac{\psi_1/\lambda_1+\psi_2/\lambda_2+\psi_3+\psi_4}{1/\lambda_1+1/\lambda_2+2} \qquad 14$$

Şimdi (Ş-6A) daki lineer azalan iki duvar arasında yerleştirilmiş bir silindir etrafındaki irrotasyonel akım ağının relaxation metodu ile tâyinini gösterelim; simetriden dolayı yalnız yarım modelin düşünülmesi. (Ş-6).

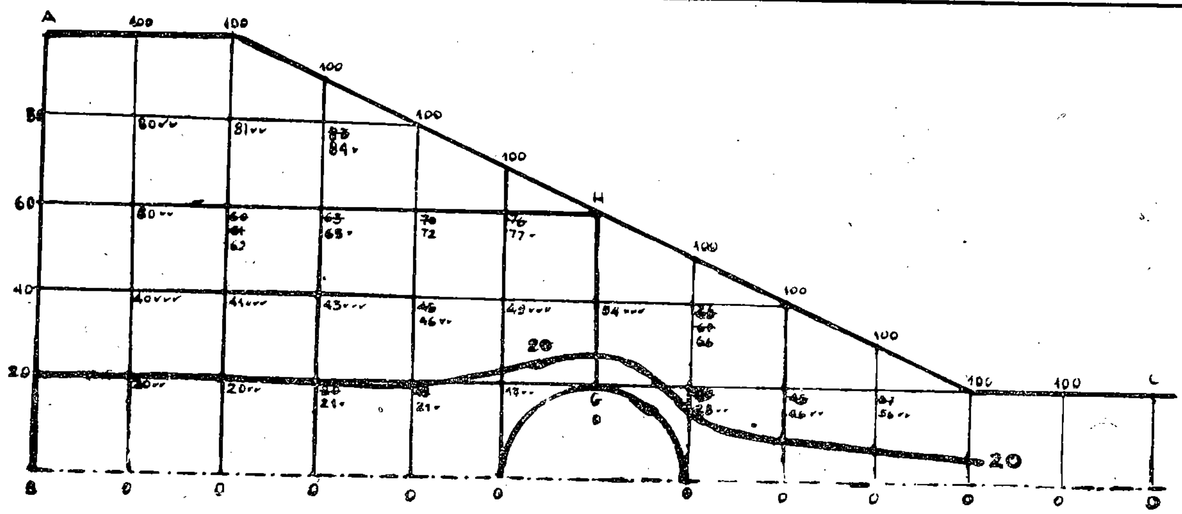


(Şekil — 6 A)

AB ve CD çizgileri boyunca akımın üniform olduğu kabul edilir. Akım çizgilerinin eğrisel karakteri haiz olduğu bölgelerde hız üniform olmayacaktır.

Çözümü elde etmek için şekli belirli bir ölçek dahilinde çizip tetkiki istenen akım çizgilerinin, üniformluğunu muhafaza ettiği nihaî hat olduğunu kabul ettiğimiz AB üzerinde seçelim ω nın değerleri eksende 0 ve sınırda 100 olsun; relaxation için seçilen akım çizgileri aralığı baz alınarak bir karesel şebeke teşkil edelim; aşikârdır ki bu şebeke akım ağı değildir; bu sebeple her düğüm noktasının ω kıymetlerinin akım ağına göre haiz oldukları değerleri tahmin etmek ve bu değerleri tashih ile şebekenin durumunu elde etmek gerekecektir.

AB sınırı üzerinde ω değerlerinin üniform değiştiği bellidir; buna mukabil EF ve GH kesitlerinde

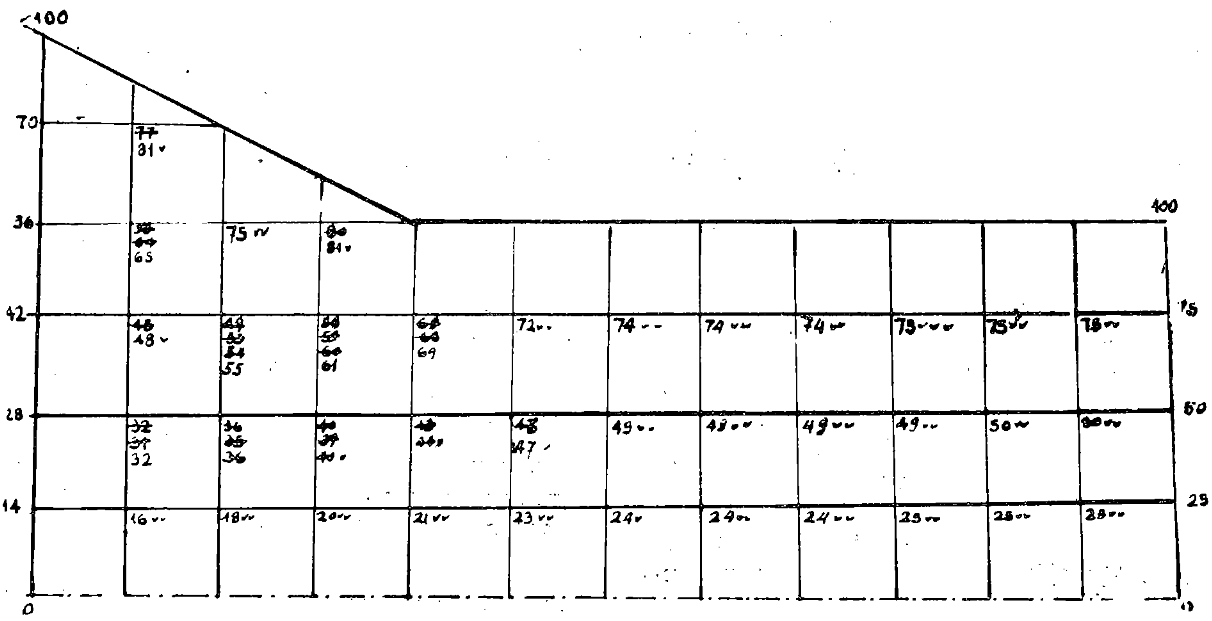


(Şekil — 6)

ω nin dağılışı üniform olmayacaktır. Düğüm noktalarındaki değerleri tahmin etmek için akım çizgileri sezgisel olarak çizip şebekenin düğümlerinin bu akım çizgilerinin konumuna göre işgal ettikleri mevkii değerlendirmelidir. Bundan sonra her düğüm noktasındaki ω değeri (13) formülüne göre tashih edilir; bu ameliyeye bir düğümde relaxation denir. Düğümleri herhangi bir şekilde relaxe etmek kabildir; fakat kolaylık olması için soldan sağa doğru bir hareket tarzı kullanılmıştır. Tam olmayan ızgara kolları için (14) formülünden ve şeklin geometrik hususiyetlerinden istifade edilerek,

$$\psi_0 = \frac{2\psi_1 + \psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4}{7} \qquad 15$$

denklemi elde olunmuştur. Relaxation'un bitimini düğüm noktalarındaki ω değerlerinin sabit kalması belirtir. Ş-6 daki misalde üç devir kâfi gelmiştir. Aynı neticeleri elde etmek için dahilî ω değerlerinin hepsini sıfır olarak kabul etmek kabildir; bu halde relaxation ameliyesi uzayacaktır. Eğer düğüm noktalarındaki ω değerleri başlangıçta yakın olarak tahmin edilirse devir adedi azalacaktır. Akım ağı için daha fazla presizyon isteniyorsa şebeke aralığı kaba ısgara üzerinden daraltılır ve ara değerler akım hususiyetleri nazarı itibare alınarak interpole edilir ve yeniden her düğüm için relaxation ameliyesi tekrarlanır. Bunu misalimizin yalnız muayyen bir kısmına tatbik etmekle yetineceğiz. (Ş-7) Ancak bu son ameliye başlangıç şartının tahmin edilenin bizzat kendisine eşit olduğu faraziyesini kabul etmekle hesap edilmiştir.



(Şekil — 7)