T.M.M.O.B.
İNŞAAT MÜHENDİSLERİ ODASI
İZMİR ŞUBESİ

ÇOK KATLI YAPILAR SEMPOZYUMU

(21-22-23 Eylül 1989)

Dr. Yük.Müh. Mehmet E. ÜLKÜDAŞ

MOD SÜPERPOZİSYONU YÖNTEMİ

MOD SÜPERPOZİSYONU YÖNTEMİ

Mehmet E. ÜLKÜDAŞ(*)

Özet

Çok katlı yapıların deprem hesaplarında bir dinamik analiz yaklaşımı olarak mod süperpozisyonu yönteminin de uygulanabileceği yürürlükteki deprem yönetmeliğinde belirtilmiş olup yeni yönetmelik tasarısında da yöntemin, konuya bir aşama daha aydınlık getirilerek benimsendiği görülmektedir.

Bu simpozyum bildirisi kapsamında yöntemin ilke ve kuramsal açıklamaları verilmekte ve uygulama pratiğine değinilmektedir.

(*) Dr.Y.Müh., Dokuz Eylül Üniversitesi

1. KURAMSAL AÇIKLAMA

1.1. Sistemin Diferansiyel Denklemleri :

Ayrık lineer bir mekanik sistemin titreşim denklemleri, matris formda

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \qquad (1)$$

olarak yazılır. Burada M kütle, C sönüm, K rijitlik matrisleri, x deplasmanlar, f ise dış yükler kolonudur.

Bağlantılı (1) denklemleri, sistemin kütle matrisine göre normalize edilmiş Z modal matrisi altında x = Zu değişken dönüşümü ile, bağlantısız

$$\ddot{u} + 2\xi\Omega\dot{u} + \Omega^2 u = Z'f \qquad (2)$$

denklemlerine indirgenir. Burada ξ sönüm oranı, Ω açısal frekanslar (köşegen) matrisidir. Modal matris Z, kolonları sistemin sönümsüz serbest titreşim modlarından oluşan kare matrisdir.

1.2. Bir İrdeleme :

Şöyle ki, bu indirgemede, sistem sönümünün lineer (viskoz sönüm) olduğu kabulü yanında, ayrıca, sönüm matrisinin

$$C = 2\xi\, MZ\Omega Z'M \qquad (3)$$

gibi bir yapıda olduğu varsayımı da yapılmış olmaktadır.

Yani, matematik işlemler için kolaylık getirmek amacı ile, fiziksel olay (gerçek yapı) ileri ölçüde 'idealize' ediliyor.

1.3. Yer Hareketi :

Çok katlı bir yapının $\delta = \delta(t)$ gibi bir yer hareketi ile zorlanması durumunda kat yükleri $f = \delta K 1$ olur. Burada 1, bütün elemanları 1 olan kolon matris ($1 = \{1\}$).

Öte yandan $Z'K = \Omega^2 Z^{-1}$ ve $Z^{-1} = Z'M$. Nitekim $Z'MZ = I$ ve $Z'KZ = \Omega^2$. Şu halde $Z'f = \delta Z'K1 = \delta\Omega^2 Z'M1$, ve i-nci ayrık denklem

$$u_i^{\cdot\cdot} + 2\xi\omega_i u_i^{\cdot} + \omega_i^2 u_i = \omega_i^2 \beta_i \delta \qquad (4)$$

olur. Bu denklemin sağ yanında yer alan

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k^i \qquad (5)$$

büyüklüğü, mühendislik literatüründe 'mod katkısı' olarak anılmaktadır ($Z = [z_k^i]$).

1.4. Deprem Hesapları :

Deprem hesapları pratikde, yapı taban seviyesinde deprem sırasında oluşan yer hareketini temsil eden $\delta(t)$ zorlamasının 'transient' etkisi geçtikten sonraki serbest titreşim için yapılmaktadır.

Ayrık (4) denklemleri lineerdir. Bu özelik, bu denklemlerin mod katkılarından arıtılmalarını mümkün kılar ($\beta_i = 1$ kabulü ile).

Projelendirme için genellikle, en elverişsiz etkileri bulmak yeterli görülür. Bu yaklaşım ile, mod katkısından arıtılmış

$$u_i^{\cdot\cdot} + 2\xi\omega_i u_i^{\cdot} + \omega_i^2 u_i = \omega_i^2 \delta \qquad (6)$$

diferansiyel denkleminin 'transient' ve 'steady state' çözümleri yerine, pratikde $\ddot{u}_i(t)$ (psödo-akselarasyon) fonksiyonunun maksimum mutlak değeri

$$\alpha_i = \max_{t>o} | \ddot{u}_i(t) | \qquad (7)$$

aranır.

Uygulamada, α_i büyüklüklerinin tayini için literatür ve yönetmeliklerde verilen öneriler, formül ve abaklardan yararlanılmaktır.

Nitekim bu büyüklüklerin kesin olarak belirlenmesi için (6) denklemlerinin analitik veya sayısal çözümü sonucu elde edilecek başlangıç koşulları altında serbest titreşim denklemlerinin çözümü ve buradan elde edilecek psödo-akselerasyon fonksiyonlarının mutlak değerce maksimumlarının bulunması; pratikde zaman tüketici ve ileri kompüter olanaklarını gerektirir nitelikdedir.

Serbest titreşim sırasında sistemi etkileyecek kuvvetler yalnız iç kuvvetler olur. Sistemde i-nci kütleye j-inci mod katkısından gelecek en büyük kuvvet ise, mutlak değerce

$$f_i^j = m_i z_i^j \alpha_j \beta_j \qquad (8)$$

olarak belirlenmiş oldu.

Nitekim, $x = Zu$ ve sistemi etkileyen (D'Alembert kuvvetleri) $f = - M\ddot{x}$. Şunu da belirtelim ki, α_i büyüklüklerinin tayininde 'transient' rejim maksimumlarının da hesaba katılması mümkündür.

Bütün modların süperpozisyonu halinde i-inci kütlede oluşacak en büyük kuvvet için bir 'üst-sınır' ise,

$$f_i = m_i \left[\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \beta_j z_i^j)^2 \right]^{1/2} \qquad (9)$$

olur.

Öyle ki, (9) kesin bir mutlak maksimum değil, yalnızca bir üst-sınır'dır. Belki projelendirme için yeterinden de büyük, ancak güvenli bir üst-sınır.

Yapı ve özellikle deprem'e ilişkin bilinemezlikler yanında bu matematik üst sınır ile sağlanabilecek güvenlik de aşırı sayılmamalıdır.

2. YÖNTEMİN UYGULANIŞI

2.1. Ön tanıtma :

Mod süperpozisyonu yönteminin uygulanışını; deprem yönetmeliğinde yer alan, uygulamada meslekdaşlarımızın alışkan olduğu, ve esası gene mod süperpozisyonu yöntemi (nin basitleştirilmiş bir şekli) olan eş-değer statik yöntem pratiği paralelinde açıklamayı yeğledik.

Eşdeğer statik yöntemde yapının kat düzeylerinde uygulanacak deprem yatay yükleri

$$F_i = (F - F_t)\,\frac{w_i h_i}{\Sigma w_i h_i} \tag{10}$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada F_t yapının en üst düzeyinde uygulanacak tekil kuvvet, $F = cW$ toplam yatay yük, W_i i-nci kat ağırlığı, h_i i-nci katın temel üst kotundan ölçülen yüksekliğidir.

Mod süperpozisyonu yönteminde ise

$$f_i^j = F^j\,\frac{w_i z_i^j}{\Sigma w_i z_i^j} \tag{11}$$

olarak (10) formülü benzerlerinden yararlanır.

Burada $F^j = c^j W$ olup j-nci mod'da katlara dağıtılacak toplam deprem yükünü belirtir. Boyutsuz c^j katsayısı ise, F^j kuvvetinin yapı toplam ağırlığına oranı olup her bir mod için ayrı ayrı bulunacaktır.

Formüldeki z_i^j büyükleri, j-inci mod kolonundaki i-nci satırda yer alan elemanı (sayısal değeri) belirtmektedir.

Şu halde önce her bir mod için c^j boyutsuz sayılarının ve z_i^j mod değerlerinin belirlenmiş olması gerekmektedir. Bu büyüklükler belirlendikden sonra, her bir mod için F^j toplam yükü yapının kat düzeylerinde (11) formülü ile dağıtılır.

Deprem hesaplarının bundan sonraki bir bölümü, eşdeğer statik yöntemdeki gibi yapılır. Yani, kesin veya yaklaşık bir yapısal çözümleme ile, kolon, kiriş ve perdelere gelen deprem kuvvetleri, eğilme momenti, kesme ve normal kuvvetler, deplasmanlar hesaplanır.

Bu aşama sonunda, bu statik/geometrik büyüklüklerin bütünü veya projelendirme amaçları için seçilen bir bölümü üzerinde, birer üst-sınır olarak

$$S_e = [\sum_{j=1}^{n} | S_e^j |^2]^{1/2} \qquad (12)$$

değerleri tayin olunur. Burada S_e^j, j-nci mod'da e-inci elemana etkiyen büyüklük olup S_e bu eleman için hesaplanan üst sınırı gösterir.

Süperpozisyon sistemin serbestlik derecesi üzerinde yapılabileceği gibi, seçilen bir kaç ilk modlar üzerinde de yapılabilir.

2.2. Modların Bulunuşu :

Görülüyor ki yöntemin uygulanışı her şeyden önce sistemin serbest titreşim modlarının bulunmuş olmasını gerekli kılmaktadır.

Sistemin serbest titreşim modları ve açısal frekansları ise

$$Kz = \omega^2 Mz \qquad (13)$$

matris özdeğer probleminin kurulup çözülmesi ile elde edilir.

Kütle matrisi M, köşegen bir matrisdir. Çok katlı yapının kat düzeylerinde topaklanmış olarak kabulü ile hesaplanan kütle dağılımı köşegen matris elemanlarına yansıtılarak M matrisi kolaylıkla teşkil edilir. Oysa K rijitlik matrisinin teşkilinde, özellikle perde+çerçeve gibi karmaşık sistemler için, birim yüklemeler altında deplasmanların (kesin veya yeterince yaklaşık) tayini, veya diferansiyel denklem yöntemi gibi başkaca yaklaşımlardan yararlanılarak, az çok kısaltılmış da olsa genellikle oldukça uzun hesap rutinlerinin, belki mümkün olabilen hallerde el ile (avan projelendirme gibi), ve genellikle komputer ile, gerçekleştirilmesi gerekmektedir.

Modların tayini için matris özdeğer probleminin belirli bir düzeyde uzmanlık ve emek gerektiren kuruluşu aşamasını izleyen çözümleme aşamasında ise; genellikle yeterli kompüter kapasitesi gereksinimi yanında, oldukça üst uzmanlık düzey ve bilinci ile hazırlanmış olan kompüter programlarının kullanılması da gerekli olmaktadır.

Matris özdeğer problemlerinin çözümü için Hessenberg Algoritması kesin ve uygulamada elverişli bir yöntemdir. Bu algoritma karakteristik polinomu inşa etmekte, ve özvektörleri (modları) tayin etmektedir. Ancak karakteristik polinomun çözümü, Hessenberg Algoritması'nın dışında kalmakta, özdeğerlerin (sistem frekanslarının) bulunması ve dolayısı ile modların tayini için Hessenberg Algoritmasında ilerleyebilmek üzere, uygun başka algoritmalardan yararlanılması gerekmektedir.

Mod ve frekansların tayininde Hessenberg Algoritması, Horner Divizyonu, Newton-Raphson İterasyonu ve karakteristik polinom köklerinin yaklaşık konumlarını 'random search' ile (bir nev'i zar atarak) yakalayan bir 'subroutine'ler bütününe dayalı, IBM ve uyumluları mühendislik büroları kapasitesindeki kompüterler için geliştirilmiş özel bir program paketinin, DEÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde tarafımızdan üretilmiş ve halen uygulanıp denetlenmiş durumda olduğunu, kaydederiz.

2.3. Spektrumlar :

Yöntemin pratikdeki uygulamalarında (11) formülünde yer alan, j-nci modda yapının katlarına dağıtılacak toplam deprem yükü F^j büyüklüklerinin tayini için gerekli olan boyutsuz c^j sayıları (toplam deprem yükü/yapı ağırlığı oranı), literatür ve yönetmeliklerde önerilen 'spektrum' değerlerinden yararlanılarak bulunur.

Yapının deprem davranışını temsil eden (1) diferansiyel denklem takımlarının analitik veya sayısal çözümleri ile c^j oranlarının belirlenmesi de mümkündür. Ancak bu yol, çok uzun ve karmaşık olup ileri düzeyde uzmanlık gerektirir. Ayrıca, büyük kapasiteli kompüterler ve özel programlarından yararlanılmadıkça, yeterli bir sonuca ulaşmak da genellikle mümkün olmamaktadır.

Literatürde spektrum (daha incelikli bir deyimleme ile ivme spektrumu) olarak adlandırılan büyüklüğün; Bölüm 1' deki kuramsal açıklamalar ışığında, (6) diferansiyel denklemlerinin $u_i(t)$ çözümlerinden gidilerek (7) bağıntıları ile belirlenecek olan ivme boyutundaki α_i değerleri olduğunu, belirtelim. Spektrumu etkileyen parametreler, $\alpha_i = \alpha_i(\omega_i, \xi, \delta)$ fonksiyonel ilişkisi ile de gösterilebileceği gibi, açısal frekans α_i, sönüm oranı ξ ve yer hareketi $\delta = \delta(t)$ olarak idealize edilen; yapı, zemin ve deprem karakteristikleridir.

Deprem yönetmeliği yeni metin tasarısı aşamasında önerilmiş bulunulan bir spektrum formülünü veriyoruz :

$$S_a = 1.35 \times [(T_0 + 0.45)/T] \times (0.05/\xi)^{1/2} \times a_{max} \quad \textbf{(14)}$$

Burada T yapı peryodu (j-nci mod için), T_0 zemin hâkim peryodu, a_{max} maksimum zemin ivmesidir. Peryodlar saniye birimi ile alınacaktır. Birinci derece deprem bölgesi için $a_{max} = 0.40$ g olarak önerilmiştir (g yerçekim ivmesi). Betonarme yapılar için sönüm oranı 0.05 $\sim$ 0.10 olarak seçilebilir.

Spektrum formülü (14) ile hesaplanacak değer, $2.5 \times (0.05/\xi)^{1/2}$ ile üstden sınırlandırılmıştır. Ayrıca bu değer, yapı önem katsayısı I ile çarpmak ve yapı süneklik oranı μ ile bölmek sureti ile $I \times S_a / \mu \longrightarrow S_a$ düzenlemesi yapıldıktan sonra kullanılacaktır. Öneri'de $\mu = 5/K$ olarak verilmiştir (K yapı tipi katsayısı).

Böylece yönetmelik veya literatürde verilen bir 'hazır reçete' spektrum yaklaşımı ile (6) diferansiyel denklemleri çözümlenmeksizin $\alpha_j = S_a^j$ büyüklükleri belirlenmiş olur.

Buradan gidilerek, boyutsuz c^j oranları

$$c_j = S_a^j \beta_j^2 / W \tag{15}$$

bağıntısından elde edilir. Nitekim

$$f^j = \sum_{i=1}^{n} f_i^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \beta_j m_i z_i^j = c^j W \; .$$

2.4. Hesaplama Pratiği :

Uygulamada fiziksel büyüklükleri boyutsuz kılmak pratik olmaktadır.

Ayrıca bu boyutsuz salt sayısal değerlerin uygun bir maksimuma oranları ile normalizasyon, el hesaplarında büyük sayılar ile işlemlerden kurtulmak açısından yararlı, ve özellikle bazı durumlarda, kompüter programlarının işlerliğini, 'over-flow'ları önleyerek, sağlamak açısından gerekli olmaktadır.

Kat ağırlıklarının yapı toplam ağırlığına oranları μ_i ile gösterilsin. Spektrum, $S_a^j = \sigma^j g$ bağıntısı ile boyutsuzlaştırılsın. Modlar; kütle matrisine göre önceden normalizasyon işlemleri yapılmaksızın, ancak hesap pratiği açısından meselâ, en büyük elemanları 1 olacak şekilde düzenlenmiş olsun. Bu durumda

$$c^j = \sigma^j \left(\sum \mu_i z_i^j\right)^2 / \left(\sum \mu_i z_i^{j\,2}\right) \tag{16}$$

olur.