

MATEMATİKSEL DÜŞÜNCENİN EVRİMİ-2

BENO KURYEL

Biyolojik varlığımızın özellikleriyle toplumsallaşmanın getirdiği kültürel, siyasi, ekonomik, psikolojik, sanatsal bileşen ve boyutlar bir evrim sürecine tekabül eder. İnsan evrimin içinde durağan bir konumda değildir. Konumunu ifade etmesi, bilinçli tercih yapması toplumsal evriminin bir parçasıdır. Evrim bir ilerleme değil, bir değişimdir. Matematik denen eserin tarihini bu çerçevede ele alarak yazmak gerektiğini düşünüyorum.

PROLEGOMENA

Matematiksel düşüncenin evriminde iki boyut göz önüne alınabilir. Birincisi, biyolojik evrimde, çokluk ve biçim gibi etmenlerle ilgili insan dışındaki diğer canlılarda görülen tepkilerdir. İnsan ile ona en yakın primatlar arasında bilişsel yetenekler açısından oldukça büyük bir uçurum olmasına rağmen evrimsel bağlantıların araştırılmasının önemini vurgulamakta yarar vardır. İkincisi ise, insanda matematiksel düşüncenin kültürel evriminin ele alınmasıdır. Her iki boyut karşılıklı etkileşim içindedir. Matematiksel düşüncenin evrimi, matematik tarihinin kendisinden başka bir şey değildir. Bu durum, matematiksel düşüncenin kendisine indirgenerek diğer toplumsal dina-

mik değişkenlerden ayrı olarak araştırılması anlamına kesinlikle gelmemelidir. Aksine, "çizgisel olmayan" metaforuyla betimleyebileceğimiz bütünsel bir süreçteki evrimini araştırmak amaçlanmalıdır. Bu ve önceki makale, böylesi bir öneri denemesidir. Bu noktada, Helen de Cruz'un (2006) yaptığı araştırmada derlediği sonuçlara dayanarak yapacağımız bazı iredellemelerle birinci boyutu kısaca ele almaya çalışalım.

MATEMATİKSEL BİLİŞ VE BİR ÖNERİ

Biliş (*cognition*) sözcüğünün içerdiği anlam bir sürece tekabül eder. Biliş, tüm hayvanların, kendileri de dahil olmak üzere, çevreden gelen bilgiyi edinmesi, işlemesi, depolaması ve

eylemesi, içeren süreçlerine dayanır. Bunlar, algılama, öğrenme, belleme ve karar vermeyi de içerir. Bir şeyi algılama ve bilme/öğrenme süreci. Süreç kavramına biraz vurgu yapalım: Süreç, bir olguyu bilmek için geçen süre değildir. Aksine, bilmek tamamlanan bir süreç değildir. Yeni öğrenirken ve öğrendikten sonra devam eden, zamanla değişen, dinamik bir yoldan söz ediyoruz. Bilmek, öğrenmek edimleri bildiğimizi uyguladığımız ortamlar ve bilmeye, algılamaya çalıştığımız ya da maruz kaldığımız başka birçok şeyle etkileşim içindedir. Bilişsel süreçler adım adım gidilen bir yol veya basamak basamak çıkılan bir merdiven olamaz. Biliş, zihnin örgüsel bir resmidir. Biliş, bilinen ve öğrenilen bir şeyin yerine birçok şeyin karşılıklı etkileşimiyle örülen

Afrika'da İşango'da bulunan kemiklerin üzerindeki çizikleri bazı bilim insanları ilk matematiksel veriler olarak değerlendiriyor.



karmaşık bir yapıdır. Bilişin kültürel evrimi gibi biyolojik evrimi de aynı örgünün içinde yer alır. Bilmenin tarihini bu karmaşık oluşumu araştırarak yazmak mümkündür. O zaman, olgusal indirgemelere ve yalnızca basit ampirik, gözlemsel irdelemelere dayanmayan "süreçleri", anlama süreçlerine zenginlik kazandırmış oluruz. Bu noktadaki sorun epistemolojiktir. Önerim, süreç ne olursa olsun, tarihinin yazılması, belirli bir bilgikuramına dayanır. Örneğin, "hayvanlar, geometri yapabilir mi" sorusu ile yola çıkabilir miyiz? Buna evet veya hayır demek tümüyle bilgikuramsal bir sorundur. Bence, yanıt hayırdır. Çünkü, insanı merkeze alan bir bakış açısına dayanır. Başka bir deyişle, insanmerkezli bir epistemolojinin ürünüdür. İnsanı öne çıkararak referans olarak alır. Bunun yerine şöyle de sorulabilir: Verili özgül ekolojik koşullara göre hayvan kendi yolunu nasıl çizer? İnsanın, geometri dediği şey doğayı anlama, değerlendirme ve ona göre tasarlaması için icat ettiği bir düşünsel ve çözüm sistemidir. Herhangi bir hayvanın uzam ile olan ilişkisini insanın tasarım bakış açısından değerlendirmesi ne şarttır ne de olanaklıdır. Boyut, çokluk, büyüklük ve eylem gibi nosyonlarının çeşitli hayvanlarda nasıl matematiksel yeteneklere denk geldiğini görmeye çalışmak onların aritmetik ve geometri bildikleri varsayımıyla hareket etmek anlamına kesinlikle gelmez. Matematik tarihindeki geleneksel saplantı, matematiğin doğada ya da evrende olduğu tezidir. Bundan önceki makalede de altını çizdiğim gibi, matematik tarihi biyolojik ve kültürel evrimin içinde yazılabilir. Burada ifade edilen "içinde yazılır" eyleminin çeşitli yaklaşımları, irdelemeleri ve sonuçları olabilir. Ancak, temel bir bilgikuramı farkından söz etmek durumundayız. Matematik canlıya özgüdür ve insan bunu sistematik hale getirebilmiştir. Bir dil olarak, bir soyutlama sanatı olarak ve metodoloji olarak kuramsal ve pratik bütünlüğü sağlayabilmiştir. Bu düşünsel evrim günümüzde ve gelecekte ürün vermeye devam edecektir. Biyolojik evrim boyutuna biraz yer vererek sürdürürelim.

BAZI ÖRNEK ÖYKÜLER

Öncelikle, sayısalık olgusunu ele alalım. Çoklukla baş etmek nasıl olur? Bunu hemen belirttik bir sayma eylemi olarak düşünmeyelim. Matematiksel yeteneği, belirttik olarak sayı saymakla özdeş tutamayız. Oransallığa, zaman aralıklarına ve

lanlar, aşına oldukları ve olmadıkları bireylerin kükremelerini ayırt edebilirler. Deneyde, ayrı ayrı zamanlarda bir ve üç kez olmak üzere kükreme ses kayıtları çıkartılmış. Aslanların, tek kükreme anında, üç kükreme anına göre daha fazla yaklaşma, sokulma gösterme eğiliminde oldukları saptanmış. Bu gözlemler sonunda

1	∩	11	<∩	21	≪∩	31	≪≪∩	41	≪≪≪∩	51	≪≪≪≪∩
2	∩∩	12	<∩∩	22	≪∩∩	32	≪≪∩∩	42	≪≪≪∩∩	52	≪≪≪≪∩∩
3	∩∩∩	13	<∩∩∩	23	≪∩∩∩	33	≪≪∩∩∩	43	≪≪≪∩∩∩	53	≪≪≪≪∩∩∩
4	∩∩∩∩	14	<∩∩∩∩	24	≪∩∩∩∩	34	≪≪∩∩∩∩	44	≪≪≪∩∩∩∩	54	≪≪≪≪∩∩∩∩
5	∩∩∩∩∩	15	<∩∩∩∩∩	25	≪∩∩∩∩∩	35	≪≪∩∩∩∩∩	45	≪≪≪∩∩∩∩∩	55	≪≪≪≪∩∩∩∩∩
6	∩∩∩∩∩∩	16	<∩∩∩∩∩∩	26	≪∩∩∩∩∩∩	36	≪≪∩∩∩∩∩∩	46	≪≪≪∩∩∩∩∩∩	56	≪≪≪≪∩∩∩∩∩∩
7	∩∩∩∩∩∩∩	17	<∩∩∩∩∩∩∩	27	≪∩∩∩∩∩∩∩	37	≪≪∩∩∩∩∩∩∩	47	≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩	57	≪≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩
8	∩∩∩∩∩∩∩∩	18	<∩∩∩∩∩∩∩∩	28	≪∩∩∩∩∩∩∩∩	38	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩	48	≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩	58	≪≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩
9	∩∩∩∩∩∩∩∩∩	19	<∩∩∩∩∩∩∩∩∩	29	≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	39	≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	49	≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩	59	≪≪≪≪∩∩∩∩∩∩∩∩∩
10	<	20	<<	30	<<<	40	<<<<	50	<<<<<		

Babil çivi yazısıyla rakamlar.

tahmin edebilmeye olan duyarlılık ve az sayıdaki şeyleri nicelendirebilme eğilimleri matematiksel yeteneklere verilebilecek örneklerdir. Matematiksel düşünebilmenin evrimini sadece bilinçli/belirttik saymaya indirgememeliyiz. Belirli bir çokluğu, saymadan tahmin edebilmek ve ona göre davranmak, algılanan büyüklüğü değerlendirmek gibi edimler birçok hayvanda açıkça saptanmıştır. Yaşamımızda farkında olmadan yapageldiğimiz bir şey bu. Bir odanın ölçülerini tahmin etmek, futbol maçındaki seyirci sayısını kestirmek, bir çatıya tünemiş kuşların sayısını anında söyleyebilmek gibi. Belirtmek ilginç olabilir: Bu nicelendirebilme yetisi Latince kaynaklı olarak İngilizcede "subitise" sözcüğü ile karşılanır. Aniden zihinde canlanan biçiminde betimlenebilecek bu sözcük, saymadan çokluğun niceliğini tahmin edebilme anlamındadır. Doğal ortamda yaşayan şempanzeler bazen diğer grubun bir üyesini yalnız yakalarlarsa öldürürler. Bunu da, kendileri en az üç maymun oldukları zaman yaparlar. Tanzanya'da yapılan bir deneysel araştırmada, inceleme altına alınan bir aslan grubuna alışık olmadıkları kükreme seslerini dinletmişler. As-

hayvanların görünmeyen itkileri sayabildiklerini göstermiştir. İnsanlara en yakın canlı olarak kabul edilen şempanzelerin sayısal yeterlilikleri üzerinde Kyoto Üniversitesi'nde bir araştırma gerçekleştirilmiş. Bir diş şempanze, bir bilgisayar paneli üzerinde simgesel dili kullanmak üzere eğitilmiş. Araştırma, sayıların sayma ve sıralanma özelliklerine odaklanmış. Şempanze, nesnelere renklere (kırmızı, yeşil, sarı, mavi veya siyah) göre ayırması, nesnelere tanıması ve numaralandırması (1-9) için eğitilmiş. Maymun, yanıtları bilgisayar klavyesinde yazıyordu. Tipik bir denemede, şempanze beş adet kırmızı diş fırçası görür. Bunun üzerine klavyedeki ilgili "kırmızı", "diş fırçası" ve "5" tuşlarına basar. Tuşlara basma sırası konusunda serbest bırakılmasına rağmen sayıyı hep son nitelik olarak seçer. Şempanze, ayrıca, sayı yetisi konusunda renk ve nesne tanıma yetilerine göre daha zayıf kalır. Başka bir denemede, şempanze bir ekran üzerindeki noktaları sayması için eğitilir. Saydıktan sonra sayının simgesini klavyeden seçerek tuşa basar. Gösterdiği performans mükemmel olmamakla birlikte oldukça hassas olmuş. Gelişigüzel yerleştirilen nok-

talarda %83,6, tek bir çizgi üzerinde yerleştirilen noktalarda %79,2 başarı göstermiş. Burada sistematik bir saymadan çok, bir "subitising" performansına tanık olunmuştur. Matematik yetilerimiz biyolojik evrimde yol alırken kültürel evrimin inşa süreçlerinde sistematik ve bilinçli saymanın temellendiği sayı sistemlerine ulaşmamız sürpriz değildir.

Biraz da geometriye bakalım. Birçok hayvan, dışarı çıktıktan sonra kovanlarına ve yuvalarına dönerler. Bu bize hayvanlarda bilişsel haritaların olduğunu gösterir. Bu bilişsel haritayla buldukları yerden hedeflerine nasıl ulaşabileceklerini "simüle" ederler. Benzetme olarak

İnsanı da içine alan ve sürmekte olan biyolojik evrimde, insana en yakın olduğu öne sürülen primatlarla insan arasındaki derin uçurum henüz tam bir açıklığa kavuşturulamamıştır. Ancak, evrim kuramının kendisi oldukça belirgin bilimsel sonuçlarla kendi evrimini sürdürmektedir. Kapsadığı farklı yaklaşımlar, aralarında çelişkiler taşısa da evrim kuramına derinlik ve açıklık kazandırmaktadır. Evrim, biyolojiye indirgenmeyecek kadar zengindir. İnsan yaşamının bir bileşeni olan varlığına anlam katan biyolojik bütünlüğüdür. Fakat, insan yaşamı biyolojiye indirgenemez. Yaşamın dinamiğini, tarihselliğini ve toplumsal örgü-

toprağına uymayan ama başarıyla uydurulmaya çalışılmış bir yanılısamayı içermektedir. Matematik insan zihninin bir ürünüdür. Diğer canlıların evriminde görülen ve de uçurumun görünmeyen köprüsünden geçerek insanla devam eden matematiksel düşünce insan yaşamının en ilginç mahsüllerinden birisidir. Uçurumun açıklayamadığı olay, soyutlama yetisinin insanda neden bu kadar farklı olduğudur. Öylesine farklıdır ki, matematiksel düşünceyi sistematik bir bütünlük içinde inşa etmiştir. Bu yapılandırma, varkalma uğraşının bir ürünüdür. Sistematik olduğu kadar kurumsaldır da. Toplumsal devrimin sınıf ve iktidar mücadelelerinde ortaya çıkan okullaşmanın karmaşık yapısında farklı ekollerle temsil edilen matematiksel paradigmlar kendi felsefesini de yaratmıştır. İdeolojik boyutlarla süslenen bu kurumsallaşma, matematik iktidarını kurmuş ve kültürel evrimin uzun bir döneminde matematik bir zekâ ürünü olarak kabul görmüş ve görmektedir. Bu bir yanılısama olsa da güçlü bir ideolojik boyuttur. Biyolojik varlığımızın özellikleriyle toplumsallaşmanın getirdiği kültürel, siyasi, ekonomik, psikolojik, sanatsal bileşen ve boyutlar bir evrim sürecine tekabül eder. İnsan evrimin içinde durağan bir konumda değildir. Konumunu ifade etmesi, bilinçli tercih yapması toplumsal evriminin bir parçasıdır. Evrim bir ilerleme değil, bir değişimdir. Matematik denen eserin tarihini bu çerçevede ele alarak yazmak gerektiğini düşünüyorum.

Matematiğin teknik konularının evrimini, "teknik bir tahakküm" oluşturmadan yazmaya devam edeceğim. Bugün teknolojinin tarihi yazılırken matematiksel düşüncenin evrimini ele almadan adım atmak kısır bir döngü yaratmaktır. Bu nedenle bundan sonraki yazılarımda teknoloji tarihinden söz ederken matematiğin teknik konularının evrimini boyutsal bir bileşen olarak katmaya çalışacağım. Bu tür denemelerin bilgiyi özgürleştireceğini düşünüyorum. Şimdi ise, bu yazının son bölümünü

Matematik insan zihninin bir ürünüdür. Diğer canlıların evriminde görülen ve de uçurumun görünmeyen köprüsünden geçerek insanla devam eden matematiksel düşünce insan yaşamının en ilginç mahsüllerinden birisidir. Uçurumun açıklayamadığı olay, soyutlama yetisinin insanda neden bu kadar farklı olduğudur.

karşılığımız, "simülasyon" sözcüğü bir kavram olarak modelleme ve çözmektir. Bilişsel üretimin evriminde her an bunu yaparız. Bana göre, simülasyonun matematiğin düşünsel evriminde belirleyici bir yeri vardır. Yapılan bir araştırmada, karıncaların buldukları yeni bir besin kaynağından yuvalarına dönebilmek için kullanacakları retinotopik nirengi noktalarını belleklerinde depoladıkları saptanmıştır. Gerek bu karıncalar gerekse labirentlerde dolanan fareler yollarını kolayca bulurken soyut geometrik ilişkiler kullanmazlar. Ancak, uzamla "uzlaşmanın" yolunu, sistematik soyutlamalara varacak evrimsel yolunda simülasyonlarla düşünsel inşaatlar yaparlar.

Yazının konusu oldukça farklı, ancak oldukça ilişkili alanları kapsamaktadır. Ancak, kısıtlı bir hacimde olmak nedeniyle bu örnekleri burada keserek önerimi tekrar toparlamak istiyorum:

sünü biyolojik evrimle açıklamak ciddi bir indirgemeciliktir. Evrim, bir değişime işaret etmektedir. Bu değişimin dinamikleri toplumsal olarak belirlenmesine rağmen toplumsalı oluşturan biyolojik varlığın ve o başlandaki evrimin bütünü açıklamaktaki katkıları yadsınamaz. Özel olarak matematik tarihi, insan yaşamının en ilginç ürünlerinden birinin macerasını anlamak için vardır. Bu macera, çok az ilgi görmüştür. Evrimsel bir süreç yaşandığı göz önüne alınmamıştır. Çünkü, matematiksel bilgi, diğer bilgi türlerine göre ilk bakışta apriorik gözüktür. İnsanın bilişsel evriminde varlığını ve çevresini gözlemlemek belirleyici olduğu için, apriorik sonuçlara kendisini yabancı hissetmiştir. Tarih boyunca, matematiğin insana rağmen var olduğunun kabulü ciddi bir paradokstur. Bu paradoks felsefi bir dev yaratmıştır. Bu dev tümüyle bir ucubedir. Felsefenin mümbit

matematik eserinin bir dil olduğuna ilişkin bir girişim yapacağım. Dilin evrimiyle matematiksel düşüncenin evrimindeki koşutluk heyecan vericidir. Matematikte estetik bileşen de evrimin bir parçasıdır. Biraz derinleşelim şimdi de:

GÖSTERGEBİLİM VE MATEMATİK

Göstergebilim, genellikle ve kabaca insanların giyinme biçimlerine ilişkin anlamlar, insanlar arasında gerçekleşen simgesel alışverişler ve göstergelerin kullanımlarıyla ilgili olduğu sanılır. Hal böyle olunca göstergebilimin matematikle ne işi vardır diye düşünülebilir. Buna birinci yanıt, matematiğin soyut gösterge dizgelerinin özbeöz araştırma ve inceleme alanı oluşudur. Buna göre, matematik öğreniminin amacı, insanların bu dizgeleri nasıl anlayıp kullanacaklarıyla ilgilidir. Hem bir disiplin olarak matematik hem de matematiğin anlaşılma süreçleri, makro ve mikro düzeylerde sonu gelmez "söyleşimler" aracılığıyla toplumsal olarak yapılandırılır. Böylece matematiği anlamak için, bu söyleşimler sırasında paylaşılan ve alışverişi yapılan metin ve göstergelere dikkat edilmesi gerekir. Peki, bunları çözmek için ne gibi araçlarımız vardır? Esinlenebileceğimiz en önemli ufuklardan birisi göstergebilimdir. Diğer bir ilgi alanı, matematik derslerinde öğretmenin ve öğrencilerin arasında oluşan söylemin incelenmesidir. Acaba, metinler, göstergeler ve anlamlar nasıl yaratılır, kullanılır, tartışılır, dönüştürülür ve değerlendirilir? İşte bu noktada, göstergebilim ve ilgili araçlar kavramsal bir yol gösterir. Hiç kuşku yok ki, göstergebilimsel yaklaşımlarda uçsuz bucaksız farklılıklar vardır ve zaten içsel bir özelliği olarak da çeşitlilik gösteren yaklaşımlar nedeniyle tümünü kapsayan kuramsal bir çerçevesi yoktur. Peirce, Saussure, Barthes, Eco, Halliday, Rotman ve diğerleri esin kaynağı olabilecek ve bir renk cümbüşünü andıran üretken ve verimli örneklerdir.

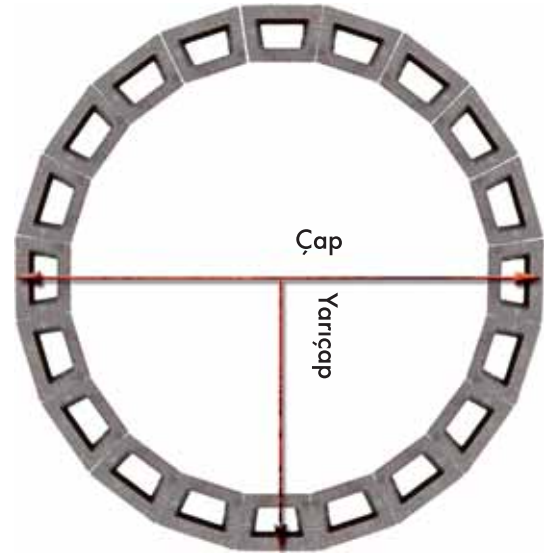
Göstergebilim, matematik ve matematik öğretimi için; dilbilimsel (linguistic), bilişsel (cognitive), felsefi,

tarihsel, toplumsal ve kültürel bakış açılarından kuramsal bir konum sunar. Bunun nedeni, gösterme eylemini (edimini) ve tüm iletişimsel etkinlikleri temel almasıdır. Uzun süreden beri kabul edilemediği gibi, simgeciliğin (symbolism) matematikte önemli bir yeri vardır. Göstergebilim, belirli bir kuramsal çerçeveler kümesi sağlayarak matematiğin gösterge (sign) ve simgelerini, hem gösterenlere hem de gösterilenlere ve daha genel olarak göstermenin tüm eylemlerine dikkatle eğilir. Göstergebilim önemli bir yönü, gösterenin dünyaya veya Matematiksel Gerçekliğe ait bir yansımayı temsil ettiğini öne süren görüşlerin (realist) aksine, gösterge ve simgeleri ve tüm dilsel edimi bir kültürel-toplumsal etkinlik olarak görmesidir. Anlam ve imgeler; bireyler ve birey toplulukları tarafından, matematiğin öğretme, öğrenme, uygulama ve tasarlama/düşünme bağlamlarında gösterge kullanımlarını edinirken, geliştirirken ve ortaya çıkarırken edinilebilir, ayrıntılanabilir ve yaratılabilir. Bu bakımdan göstergebilim, matematiksel bilginin "içsel" mi, "dışsal" mı olduğu yönündeki dikotomiyi bir tarafa bırakarak, toplumsal bilimlerde, psikolojide ve diğer bilim dallarında matematik öğretimi için açılmış yeni yollara bir erişim sağlar.

DİL VE MATEMATİKSEL ANLAMIN OLUŞUMU

Yukarıda sözünü ettiğimiz "söyleşimler" sırasında dili kullanırız. Yani dile getiririz. Dile gelenin farkında mıyız? Bazen evet, bazen hayır. Ancak, bu soruyu sormazsak hiç de farkında değiliz demektir. Dili kullanmakla dile getirmek arasındaki ince fark buradadır. Örneğin, πr^2 bir *simgeler dizgesidir*. Bu dizge bir sözdizime (syntax) sahiptir. Düz okunuşu, "*pi re kare*"dir. Şimdi, bu sözdizimin anlamlarına, anlambilimsel (semantics) karşılıklarına bakalım. Düzanlamı (denotative), "*pi sayısı*yla *r* değişkeninin karesinin çarpımı"dır. Ancak, yananlamı (connotative), "*yarıçapı r* olan bir çemberin alanı"dır. Yananlamlar elbette tek değildir. Dile getirmeye devam edelim: "Bir çembe-

rin alanı, yarıçapının karesiyle doğru orantılıdır", "Bir çemberin alanı ile yarıçapının karesi arasındaki oran sabittir ve bu sabit *pi* sayısıdır". İşte, simgesel bir dizgenin varoluşundaki anlamlar bütünlüğü. Bu bütünlük algılanmadan öğrenme süreci yapılandırılmaz. Şimdi de, $(\pi/4)D^2$ simgeler dizgesine bakalım. Düz okunuşu "*pi bölü dört de kare*"dir. Düzanlamısal olarak, "*pi* sayısının dörde bölümünün, *d* değişkeninin karesiyle çarpımı"dır. Yananlamı, "*çapı D* olan bir çemberin alanı"dır. O halde, πr^2 ile $(\pi/4)D^2$ gösterenleri düzanlamısal olarak kesinlikle aynı şeylerdir. Ancak, yananlamısal olarak ikisi aynı



D = çap, r = yarıçap.

şeydir ve bir gösterilen olan çemberin alanına eşittir. Yarıçap, çapın yarısı olduğundan r^2 ve $(D/2)^2$ ancak yananlamısal olarak aynı şeye işaret eder. İlginçtir, varolan eğitim paradigmasında bu bağıntılara "formül" denir ve "ezberlenir". Ve böylece, çemberin alanı için, πr^2 yerine, $(\pi/4)D^2$ yazıldığı zaman hatırı sayılır sayıda öğrenci durumu yadırgar ve algılamada güçlük çeker.

METİNLER VE MATEMATİĞİN NESNELERİ (SOYUTLAMALARI)

matematiksel nesnelere, "oralarda dışarıda olup da keşfedilmiş" değildir. Aksine, "buralarda bir yerde yaratılmıştır". "Buralarda" sözcüğü, tarihselce yaratılmış ve toplumsalca kısıtlanmış söylem içinde, göstergelerin kültürel dolaşımı, değişimi ve yorum-

laması anlamına gelmektedir. Matematik söylemi, bir kültürel alan oluşturur, yaratır. Matematiksel nesnelere de bu alan içinde kullanımda olan matematiksel göstergelerle meydana getirilir. Matematiksel gösterenler ve gösterilenler, birbirleriyle karşılıklı etkileşim içindedir. Örneğin, " $5 \times 8 =$ " bir gösteren, çarpma işlemi ise bir

evrilir. Her yazı veya sözün altında yatan gösterge, dil oyunları ve yaşam biçimlerinde insanlararası bir sözleşmeden ortaya çıkar. Örneğin, yüzde hesapları, cebirsel kurallar birer toplumsal sözleşmedir.

Matematiğin 5.000 yıllık yazılı tarihinde, çok büyük sayıda matematik

artan sayıda matematiksel semboller, diyagramlar, yazım biçimleri ve notasyonlar vardır. Sayıları temsil eden basit sembelerden başlayarak, matematiksel notasyon tarih içinde çok ayrıntılanmış ve özelleştirilmiş bir sembeler kümesi haline gelmiştir. Bu küme, birçok semge, belirtke (icon) ve şekil içermektedir. Bu, özellikle matematiksel hesaplamalar, akıl yürütmeler ve kavramsallaştırmalar için büyük bir destektir. Aynı zamanda, matematiksel anlamın oluşumunu çözümlenmek için olgun bir kaynaktır.

Her bir matematiksel dil oyunu içsel bir bölümü, bir dizi kurala dayalı simgesel dönüşümlerdir. Bunlar, sayısız bağıntı ve tümceleri içerir. Örneğin, trigonometrik özdeşlikler, denklemin bir tarafından diğerine geçenken işaretin değişmesi, türev-integral ilişkisi gibi. Bu özdeşlik ilişkileri ve dönüşümler, bağlamdan bağımsız olarak sembelerle ifade edilerek kurulur ve çok sayıda matematiksel dil oyunları arasında paylaşılır.

MATEMATİĞİN ESTETİK BİLEŞENİ

Matematiğin estetik çekiciliği, birçok yazar ve düşünür tarafından gerek edilgin bir tasarım olarak gerekse gerçek bir araştırma uğraşında dile getirilmiştir. Kepler gibi klasik ve ortaçağ düşünürleri, "altın oran" olgusunu sınırsız bir coşku ile ifade

Tarih boyunca, matematiğin insana rağmen var olduğunun kabulü ciddi bir paradokstur. Bu paradoks felsefi bir dev yaratmıştır. Bu dev tümüyle bir ucubedir. Felsefenin mümbit toprağına uymayan ama başarıyla uydurulmaya çalışılmış bir yanılısamayı içermektedir. Matematik insan zihninin bir ürünüdür.

gösterilendir. Aynı zamanda, çarpma işlemi bir gösteren olarak bir dikdörtgenin alanını gösterir. Alan yeni bir gösterilendir. Böylece, matematiksel söylemin kullanım süreci, matematiksel nesnelere yaratılmasında, korunmasında ve ayrıntılanmasında bir araç durumundadır. Matematiksel nesnelere ve içinde yaşadıkları matematiksel söylemin tarihsel özelliği dolayısıyla, matematikçiler ve matematiği öğrenip kullananlar, daha önceden var olan ve oturmuş söylem alanlarına katılmayı öğrenirler. Bu katılımlarla yeni karşılıklı etkileşimler oluşur ve matematiksel söylem

alanı ortaya çıkmıştır. Öncelikle matematiksel bilgi alanlarının büyük bolluk içinde belirdiğini görüyoruz. Bunlar, matematiksel kuramlar, dil oyunları ve bağlamlar biçiminde betimlenebilir. Matematik ilk olarak, matematik öncesi diyebileceğimiz üç alanla kendini göstermiştir: İlkel muhasebe, kılışsal geometri ve ölçümler. Bu kültürel açılımın, İÖ 4000 yıllarında Mezopotamya'ya kadar gittiği söylenir. 20. yüzyılın sonlarına doğru, matematik alanındaki alt uzmanlık alanı sayısı 3.400'e ulaşmış bulunmaktadır. Bu uzmanlık alanları arasında paylaşılan çok ve gittikçe

Altın Oran,
Atina
Akropolisindeki
Parthenon'a da
uygulanabilir.



etmişlerdir. Pioncaré, matematiksel yaratıcılıkta belirleyici etmenin mantık değil, estetik olduğunu ileri sürmüştür. Her şeyde olduğu gibi, bir işi başarmanın ya da en azından o işe koyulmanın ilk koşullarından birisi o işi sevmektir. Bir şeyi sevmek ona ilgi duymak, bir beğeni duygusunu içermektir. Matematik gibi soyut tasarımların içinde mantık, sezgi ve biçimi yakalamak, aynı zamanda bir esin kaynağını beraberinde yaşama-yı getirir. G. H. Hardy'nin belirttiği gibi, "matematikçinin desenleri, bir ressamın ya da bir şairin desenleri gibi güzel olmalıdır. . ." Matematiği yaşayanlar; yani onu bir yöntembilime indirgemeyen, salt akademik bir ekmek kapısı olarak görmeyen, sıradan bir meslek ilişkisi içinde olmayan kişiler, kendi ruhsal yapılarına ve içinde büyüdükleri kültürel koşullara bağlı olarak daima matematiğin güzelliğinden söz etme gereksinimi duymuşlardır. Ünlü fizikçi P. A. M. Dirac, biraz da coşarak, bir denklemde güzelliğin, o denklemin fizikle uyumundan daha önemli olduğunu vurgulamıştı. Aslına bakarsak matematiksel dilin simgesel güzelliği yanında, o denklemin doğal bir olguyu betimlemeye çalışması da ayrı bir estetik yön içerir. Çünkü günlük yaşamın içinden gelen bir bağlantıdır bu. Hava tahminlerinde kullanılan matematik modellerin içerdiği diferansiyel denklem dizgelerinin çözümü, başlangıç koşullarına o kadar bağlıdır ki, çözümlerin grafiksel görünümündeki kaotik yapı hemen dışa yansır. Bir kelebeği andıran bu çözüm kümesine, başlangıç koşullarına olan derin duyarlılığı nedeniyle kelebek etkisi adı verilmiştir. Örneğin, küçük bir hava değişikliğinin bir kelebeğin kanatlarını çırpması kadar binlerce kilometre uzaklıktaki bir bölgede fırtına yaratacağı metaforu ünlüdür.

Matematikle uğraş içinde olmuş ünlü insanların sözleri bir önem taşısa da, matematiğin estetiğini bunlarla kanıtlama çabası içinde olunamaz. Bunların hem tarihsel bir değeri vardır, hem de ayrı ayrı dönemlerde, farklı alanlarda araştırma yapmış bu insanların birbirlerinden bağımsız

olarak matematiğin estetik niteliklerinden söz etmiş olmaları dikkat çekicidir. Tarihin her döneminde göze çarpan estetik bileşeni araştırmak, tartışmak, yani matematiği yaşama davet etmektir amacımız. Ayrıca, estetik kaygı; döneme, matematiğin içinde yaşadığı kültüre, teknolojik gelişmelere çok bağlıdır.



Araştırma ve öğretimin her düzeyini estetikle ilişkilendirme fırsatlarının sonsuz olduğunu da söyleyebiliriz. Örneğin, bugün geometrinin, cebirin, matematiksel yazılımların ve görsel ortamların gelişmesi ve kazandığı güçle estetik bileşenle kurulan ilişkilerin artacağı ve biçim ve de yorum değiştireceği açıktır. Burada önemle vurgulanması gereken bir nokta da "öğrenme ve öğrenmeyi öğrenme" olgusudur. Zihinsel etkinlikler olarak bilişsel süreçlerin bireysel öğrenme tarz ve profilinin içinde alacağı yol, o bireyin kalemi ve kâğıdı ele alış biçiminden, bilgiyi kurma, kullanma ve paylaşma şekline kadar bir dizi duygusal aşama içerir. Bunların psikanalitik irdelenmesi bir başka yazı konusu olmakla birlikte öğrenme sürecinin estetikle, yaşamla kurulan bağların renkleriyle olan ilişkisine parmak basmakta yarar vardır. Bu bakımdan, matematiğin estetik bileşenini iki açıdan ele alabiliriz. Birincisi matematiğin kendi yapısal özelliklerinin taşıdığı estetik nitelikler, diğeri bireyin matematikle kurduğu ilişkide ortaya çıkan duygusal bağlantılardır. Matematik, bir soyutlama sanatıdır.

Bunların yanında, genel olarak bakarsak matematiğin estetik bileşenine karşı körlük yaygındır. Genelde matematik, toz kadar kuru, bir telefon rehberi kadar heyecan verici ve ortaçağdan kalan miyadını doldurmuş yasalar kadar uzaklardadır. Aksine, estetik bileşene değer vermek, konunun harika bir şekilde



Yer'in ve öteki gezegenlerin Güneş'in çevresinde eliptik yörüngeler üzerinde dolandığını bulan Alman astronom Johannes Kepler (1571-1630).

Henri Poincaré (1854-1912)'in matematiksel çözümleme alanındaki katkılarının en önemlisi dönen akışkan kütlelerin denge kuramına ilişkindir.

yaşanmasına neden olur ve insan zihninin başka hiçbir yaratısının yapamayacağı gibi alevli bir coşku verir. Sanat ve müzikte güzellik, en azından Platon zamanından bu yana araştırılmış bir olgudur. Bu olgu daha çok, düzen, oransallık, denge, uyum, birlik ve açıklık kavramları cinsinden inceleme konusu yapılmıştır. Tüm bunlar estetik bir çözümlemede rol oynamalarına rağmen, estetiği salt güzellikle açıklamak yetersizdir. Çünkü estetik yargılar, kişisel olma eğilimi taşır, kültürden kültüre ve kuşaktan kuşağa değişimler gösterir. Önemli olan, yalnızca neyin "güzel" olduğu değil, aynı zamanda estetik yargıların nasıl işlediğini ve ne gibi işlevlere sahip olduğudur. Bu noktada bir kez daha altını çizmek gerekir ki, bilgi denen olgu gerek pedagojik, okul ve okul sonrası süreçlerle ilgili, gerekse bilgikuramsal, felsefe/bilim/paradigmalar bağlamında, yaşamın çok yönlü etkileşim ve mücadelelerinde bir anlam kazanır. Matematik özelinde de estetik yargılar vardır, önem taşır, geliştirilebilir, bir kuşaktan diğerine, öğretmenden öğrenciye, bir yazardan okura, bir okurdan diğerine aktarılabilir.

Peki, nedir bu matematik *estetik*, ya da ne olabilir? Birkaç özellik üzerinden gidelim. Matematikte, bir problem çözülür ya da bir çıkarsama yapılırken yaşanan süreç gerilimler ve gevşemelerle doludur. Gerilim ve gevşemeler bir ardışıklık içindedir. Sezgisel bir atılım, mantıksal bir engelle karşılaşabilir. Örneğin geometrik bir gösterimde, sezgisel yolla çizilen bir doğru parçası, problemin kuruluşu ile çelişebilir ve gerilim yaratır. Ardından çizilen bir başka doğru parçası, problemin çözümünü hemen aydınlatabilir

ması hoş bir şaşkınlık yaratır. Diğer bir olay, duyuşsal ve görsel hazdır. Matematik, bir bakımdan dilsel bir yapıdır. Gündelik dile ortak yönleri olan ancak kendine özgü bir dildir de. Duyusal ve görsel hazza iki açıdan yaklaşabiliriz. Birincisi görselin ağır bastığı durumdur. Bir metni çizime dönüştürmenin hazzı. Algılama ve kavrayışın belki de sınıdığı bir adım. Dili, yazı ve çizim kurallarıyla kullanarak bir kavramı ya da kavramlar kümesini ele almış oluruz. İkincisi duyuşsal hazzın ağır bastığı durumdur. Burada, mate-

jik ve felsefi (bilgikuramsal) yönlerini ifade etmektedir. Bir diğer estetik nitelik matematiğin özgürlüğü ve kısıtlamaları aynı anda yaşatabilmesidir. Örneğin, 13. yüzyılda yaşayan, Arap ve Hint kültürlerinin matematik bilgilerini derleyen, cebir ve sayı kuramına önemli katkılar yapan Piza'lı Fibonacci'nin geliştirdiği sayı dizileri, sayısal bilgisayarların gelişmesine kadar -1950'ler- sümen altında kalmıştır. Daha sonra, gerek benzetim (simulation) gerekse olası en iyiyi hesaplamada (optimisation) yaygın bir kullanım

Matematikselsel nesnelere ve içinde yaşadıkları matematikselsel söylemin tarihsel özelliği dolayısıyla, matematikçiler, daha önceden var olan ve oturmuş söylem alanlarına katılmayı öğrenirler. Katılımlarla yeni karşılıklı etkileşimler oluşur ve matematikselsel söylem evrilir. Her yazı veya sözün altında yatan gösterge, dil oyunları ve yaşam biçimlerinde insanlararası bir sözleşmeden ortaya çıkar.

ve haz dolu bir gevşeme yaşanır. Bir başka durum, hedeflenene varabilme duyusudur. Beklentiler gerçekleşmiştir. Gözlem ve deneyimlerle elde edilen bazı sonuçlara, matematik kanıtlar köprüsünden de geçilerek varılabilmektedir. O anda insanın yüzündeki gülümseme, estetik bileşenin dışı vurmuş biçimlerinden birini örnekler. Bir başka durum, matematiğin sürprizlerle dolu olmasıdır. Basit bir örnek dizilerde ve seri açılımlarında görülebilir. Dizi ve serilerin özellikleri araştırılırken, karşımıza bir diferansiyel denklemin çözümü çıkabilir. Ya da bu çözümün yaklaşık bir karşılığı önümüze dikilebilir. Sürprizler, matematik derslerinde öğrencilerin de karşılaştığı ilginç durumlardır. Yapılan bir tanımlamanın, tam da fiziksel bir probleme denk gelmesi, fiziksel bir çözümleme ile aynı sonuca varıl-

matikte sayısız örneklerini gördüğümüz ve matematik anlamı belirleyen bir sentez söz konusudur. Matematik anlam nasıl yapılır? Matematik ve dil ilişkisini kapsayan bu soru bir başka yazının konusu olsa da, burada estetik değerler açısından matematiğe şiirsellik kazandıran bir olgudan kısaca söz etmeliyiz. Düzenlam (denotative) ve dolaysalanlam (connotative). Örneğin, $1 + 4$ ile $4 + 1$ düzenlamsal olarak aynı şeyler değildir. İkisi de farklı metinlerdir. Ancak her iki metnin dolaysalanlamı, 5 değerine eşit olmalarıdır. Dikkat edilirse, öğrenime yeni başlayan çocuklar ve hepimiz çocukluğumuzda $3 + 7$ 'nin 10 olduğunu öğrendikten sonra, $7 + 3$ 'e sessiz kalmışızdır. Görseli ve duyuşsalı, zihnin bilişseli içinde barındıran bu yapılar, matematiğe tepkinin, kaygının ve aynı zamanda da isteğin ve hazzın psikolo-

kazanmıştır. Bir başka yön, bana göre en önemli estetik özellik, matematiğin "biricikliğidir" (uniqueness). Bilimin pozitivist örgütleniş sürecinde araştırma dallarının birbirinden kesin çizgilerle ayrılmasından sonra matematik de bölük pörçük alanlara ayrılmıştır. Özellikle eğitim alanında kendisini açıkça duyuran bu parçalanmışlık matematiğin bir bütün olduğunun algılanmasını engellemiştir. Bu da matematiği sevimsiz kılmıştır. Akademik yaşantım süresince sayısız öğrencinin, matematiğin bütünlüğünü ve biricikliğini kavradığı zaman, matematiğe olan sevimsiz ve kaygı dolu duygularının nasıl değiştiğine tanıklık etmiş ve bire bir yaşamışım.

Matematik tarihi, günün her anında yazılan öykülerle ne kadar yakın ve ilişkili, değil mi?

KAYNAKLAR

- Boyer, C. B., "A History of Mathematics", 2. Edition, Wiley, 1991.
 Burton, D. M., "The History of Mathematics – An Introduction", 5. Edition, McGraw-Hill, 2003.
 Davis, J. P., ve Hersh, R., "The Mathematical Experience", Mariner Books, 1998.
 De Cruz, H., "Towards a Darwinian Approach to Mathematics", Foundations of Science (2006) 11: 157–196, 2006.
 Ernest Paul, *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, New York: SUNY Press, 1997.

- Flegg, G., "Numbers: Their History and Meaning", Penguin, 1983.
 Godino, J. D. (1996). *Mathematical concepts, their meanings and understanding*. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Vol. 2, pp. 417-424. Valencia.
 I. Grattan-Guinness, "The Search for Mathematical Roots", Princeton, 2000.
 Jonatan M. Borwein, "Aesthetics for the Working Mathematician", Mathematics and Aesthetics, Queens University Symposium, April-2001.
 Lakoff, G., ve Nunez, R., E., "Where Mathematics

- Comes From", Basic Books, 2000.
 Maturana, H. & Varela, F. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*, Boston: New Science Library.
 Reuben Hersh, "Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics", American Mathematical Monthly, August-Sept., 589, 1995.
 Thomas Tymoczko, "New Directions in the Philosophy of Mathematics", Princeton, 1998.
 Rotman, B. *Toward a semiotics of mathematics*. Semiotica 72, 1-35, 1988.